BSc D-MAVT, ETH Zürich

Numerische Mathematik

Lösung der Prüfung

Sommer 2009

Prof. K.Nipp

— • —

1. **a)** (i) Aus dem Butcher-Tableau folgt:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t + 0 \cdot h, x + h \cdot 0) = f(t, x), \\ k_2 &= f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} k_1), \\ \overline{x} &= x + hk_2 = x + h\, f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} k_1). \end{aligned}$$

(ii) Wende das Verfahren an auf $\dot{x} = \lambda x$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x) = \lambda x, \\ k_2 &= \lambda(x + \frac{h}{2} k_1) = \lambda(x + \frac{h}{2} \lambda x) = \left(\lambda + \frac{h\lambda^2}{2}\right) x, \\ \overline{x} &= x + hk_2 = x + h(\lambda + \frac{h\lambda^2}{2})x = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right) x. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}.$$

Gesucht ist weiter $B = \{z \in \mathbb{R};\, |R(z)| < 1\} \subset \mathbb{R}$. Man kann schnell sehen, dass $R(z) > 0$ für $z \in \mathbb{R}$ ($R(z) = 0$ hat Lösungen $-1 \pm \mathrm{i}$). Untersuche also den Rand $\partial B = \{z \in \mathbb{R};\, |R(z)| = 1\}$:

$$R(z) = 1 \Leftrightarrow z + \frac{z^2}{2} = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ oder } z = -2.$$

Es gilt also $B = (-2, 0)$.

b)
```
function [xstar]=min_lsq_sol(A,c)
  [u,s,v]=svd(A);
  k=rank(A);
  y=zeros(k,1);
  for i=1:k
    y(i)=u(:,i)'*c/s(i,i);
  end
  xstar=v(:,1:k)*y;
end
```

Bitte wenden!

2. **a)** Zu zeigen:

(i) F bildet I in sich ab.

(ii) F ist eine Kontraktion (hinreichend ist $|F'(x)| \leq L < 1, \forall x \in I$).

(i) Es gilt $F'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} < 0, \forall x \in I$. Damit ist F monoton, es genügt also, die Endpunkte zu betrachten:

$$\begin{aligned} F(1.75) &= 1 + \frac{4}{7} + \frac{16}{49} = \frac{93}{49} \approx 1.897959 \in I, \\ F(2) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75 \in I. \end{aligned}$$

Somit gilt $F(I) \subset I$.

(ii) Es gilt $F''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} > 0, \forall x \in I$. Damit ist F' auch monoton, und es genügt wieder, die Endpunkte zu betrachten:

$$\begin{aligned} F'(1.75) &= -\frac{16}{49} - \frac{128}{343} = -\frac{240}{343} \approx -0.699708, \\ F'(2) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} = -0.5. \end{aligned}$$

Mit $L := \sup_{x \in I} |F'(x)| = \frac{240}{343} < 1$ gilt $|F'(x)| \leq L < 1, \forall x \in I$. $\square$

b)

$$\begin{aligned} x^1 &= F(x^0) = 1 + \frac{5}{9} + \frac{25}{81} = \frac{151}{81} = 1.86419753\ldots \\ x^2 &= F(x^1) = 1 + \frac{81}{151} + \frac{6561}{22801} = \frac{41593}{22801} = 1.82417437\ldots \end{aligned}$$

3. **a)** $h_0 = \frac{1}{2}$, $s_0 = \frac{1}{2}(f(0) + f(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$, $T_0 = s_0 h_0 = \frac{1}{4}$.
$h_1 = \frac{1}{4}$, $s_1 = s_0 + f(\frac{1}{4}) = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$, $T_1 = h_1 s_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{8} = 0.198223304\ldots$

b) $R_{11} = \frac{4}{3}(T_1 - \frac{1}{4}T_0) = \frac{5-2\sqrt{2}}{12} = 0.180964406\ldots$

c) Approximiere $f'(\frac{1}{4})$ mit

$$\frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2.$$

und $f''(\frac{1}{4})$ mit

$$\frac{f(\frac{1}{2}) - 2f(\frac{1}{4}) + f(0)}{(\frac{1}{4})^2} = 16(\sqrt{2} - 1) = 6.6274169979\ldots$$

4. **a)** Gauss-Seidelverfahren: zu berechnen ist die Lösung x^1 von $(D + L)x^1 = -Rx^0 + b$, wobei

$$A = D + L + R, \text{ d.h. } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Vorwärtseinsetzen:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right|, \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{17}{8} \end{pmatrix}.$$

b)

```
function[u,iter]=cg(A,b,u0,maxit,tol)
% CG-Algorithmus zum Loesen der Gleichung Au+b=0
%   Input:
% A,b        Matrix, bzw. Vektor in Au+b=0
% u0         Startvektor
% maxit      maximale Anzahl Iterationen
% tol        Toleranz
%   Output:
% u          Numerische Loesung von Au+b=0
% iter       Anzahl durchgefuehrter Schritte
r0=[ A*u0+b; ]
p=[ -r0; ]
r=r0;
u=[ u0; ]
for iter=1:maxit
  rTr1=[ r'*r; ]
  if [ iter>=2 ]
   e = rTr1/rTr0;
   p=[ -r+e*p; ]
  end
  rho=[ rTr1/(p'*A*p); ]
  u=u+rho*p;
  r=[ r+rho*A*p; ]
  rTr0=rTr1;
  if norm(r)<=[ tol*norm(r0) ]
   return
  end
 end

 if iter==[ maxit ]
    error(['keine Konvergenz nach ',int2str(maxit),' Schritten'])
 end
end
```

Bitte wenden!

5. **a)** Diskretisierung im Ort: Berechnung der Approximationen $u_\ell(t)$ von $u(t, x_\ell)$, $\ell = 0, \ldots, 3$ (wobei $x_\ell = \ell h = \frac{\ell}{3}$). Um den u_{xx}-Term zu approximieren, benütze:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(t, x+h) - 2u(t,x) + u(t, x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Dann erhält man das folgende gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$\dot{u}_\ell(t) = \frac{u_{\ell+1}(t) - 2u_\ell(t) + u_{\ell-1}(t)}{h^2} - \sin(3\pi x_\ell), \quad \ell = 1, 2,$$

$$\text{wobei } u_0(t) = 2,\ u_3(t) = 0,\ \forall t > 0, \qquad u_1(0) = \frac{3}{2},\ u_2(0) = \frac{1}{2},$$

also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\underline{u}}} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix}}_{=\underline{0}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}}_{=:A}\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\underline{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\underline{b}}, \qquad (1)$$

mit Anfangsbedingung $\underline{u}(0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})^\top$.

b) Sei $\underline{\tilde{u}}^0 = \underline{u}(0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})^\top$. Einen Schritt der Trapezregel für (1) lautet nun

$$\underline{\tilde{u}}^1 = \underline{\tilde{u}}^0 + \frac{\overline{h}}{2}\left(A\underline{\tilde{u}}^0 + \underline{b} + A\underline{\tilde{u}}^1 + \underline{b}\right),$$

somit ist $\underline{\tilde{u}}^1$ die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(I_2 - \frac{\overline{h}}{2}A)\,\underline{\tilde{u}}^1 = \underline{\tilde{u}}^0 + \overline{h}\left(\frac{1}{2}A\underline{\tilde{u}}^0 + \underline{b}\right),$$

also von

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\underline{\tilde{u}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rr|r} 8 & -2 & 9 \\ -2 & 8 & 3 \end{array} \longmapsto \begin{array}{rr|r} -2 & 8 & 3 \\ 0 & 30 & 21 \end{array} \Rightarrow \underline{\tilde{u}}^1 = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

6. **a)** Setze $y = \dot{x}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) (i) Explizites Eulerverfahren:

$$\bar{z} := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}}_{=:A_1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $z \in K$ (d.h. $\|z\|_2 = R > 0$). Es gilt:

$$\|\bar{z}\|_2^2 = \bar{z}^\top \bar{z} = z^\top A_1^\top A_1 z = z^\top \begin{pmatrix} 1+h^2 & 0 \\ 0 & 1+h^2 \end{pmatrix} z = (1+h^2)\|z\|_2^2 = (1+h^2)R^2 > R^2,$$

damit ist $\bar{z} \notin K$ (spiralt nach aussen).

c) (i) Implizites Eulerverfahren:

$$\begin{aligned} \bar{z} := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \bar{y} \\ -\bar{x} \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{1+h^2} \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}}_{=:A_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Sei $z \in K$ (d.h. $\|z\|_2 = R > 0$). Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\bar{z}\|_2^2 &= \bar{z}^\top \bar{z} = z^\top A_2^\top A_2 z = z^\top \frac{1}{(1+h^2)^2} \begin{pmatrix} 1+h^2 & 0 \\ 0 & 1+h^2 \end{pmatrix} z \\ &= \frac{1}{1+h^2}\|z\|_2^2 = \frac{R^2}{1+h^2} < R^2, \end{aligned}$$

damit ist $\bar{z} \notin K$ (spiralt nach innen).