BSc D-MAVT, ETH Zürich
Numerische Mathematik
Lösung der Prüfung
Winter 2009

Prof. K.Nipp

— • —

1. **a)** A muss symmetrisch sein $\Rightarrow \alpha = -2$.
A positiv definit (für $\alpha = -2$):

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} < 0.$$

Beide EWe < 0, also NICHT positiv definit $\Rightarrow$ CG-Verfahren für keinen α-Wert anwendbar!

b) Das Jacobi-Verfahren ist konsistent, falls D regulär ist. Das ist der Fall, wenn $\alpha \neq 0$. Die Iterationsmatrix T des Jacobi-Verfahrens ist dann:

$$T = -\,D^{-1}(L+R) = -\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+\alpha}{\alpha} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Idee: falls $\varrho(T) < 1$ gilt, konvergiert das Verfahren in jeder Norm.

$$\det(T - \lambda I_2) = \lambda^2 - \frac{1+\alpha}{3\alpha} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\alpha}{3\alpha}},$$

$$\text{also: } \varrho(T) = \max_{i=1,2} |\lambda_i| < 1 \iff \left|\frac{1+\alpha}{3\alpha}\right| < 1 \iff -1 < \frac{1+\alpha}{3\alpha} < 1 \tag{1}$$

Kontrolliere, dass (1) für beide Fälle gilt:

$$\underline{\text{Fall } \alpha < -\frac{1}{4}}: \ \frac{1+\alpha}{3\alpha} < 1 \overset{\alpha<0}{\iff} 1 + \alpha > 3\alpha \iff 1 > 2\alpha$$

$$\iff \alpha < \frac{1}{2} \text{ (ist bereits der Fall)}$$

$$\frac{1+\alpha}{3\alpha} > -1 \overset{\alpha<0}{\iff} 1 + \alpha < -3\alpha \iff 1 < -4\alpha$$

$$\iff \alpha < -\frac{1}{4} \text{ (ist bereits der Fall)}$$

Bitte wenden!

$$\underline{\text{Fall } \alpha > \frac{1}{2}}: \quad \frac{1+\alpha}{3\alpha} < 1 \overset{\alpha>0}{\iff} 1+\alpha < 3\alpha \iff 1 < 2\alpha$$

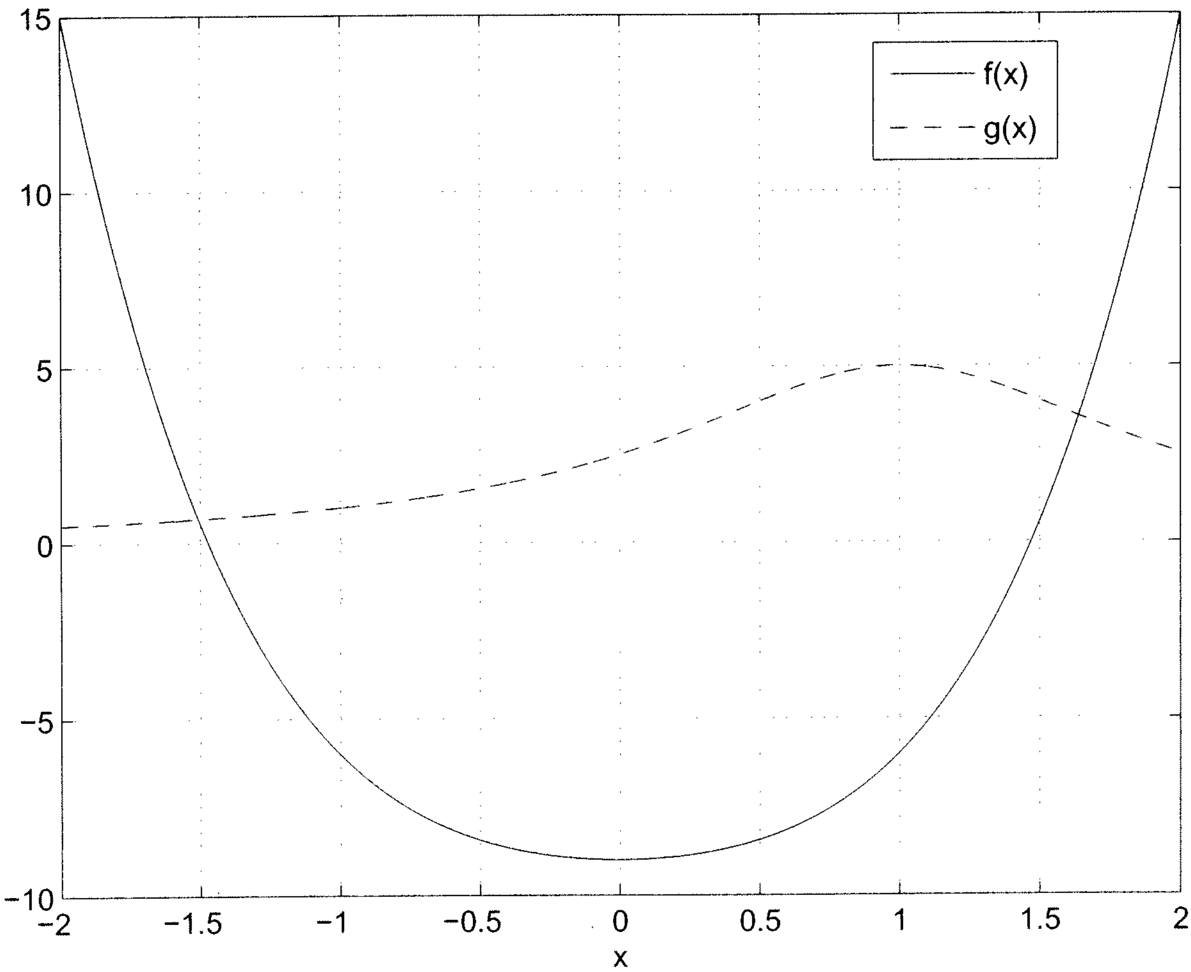
$$\iff \alpha > \frac{1}{2} \text{ (ist bereits der Fall)}$$

$$\frac{1+\alpha}{3\alpha} > -1 \overset{\alpha>0}{\iff} 1+\alpha > -3\alpha \iff 1 > -4\alpha$$

$$\iff \alpha > -\frac{1}{4} \text{ (ist bereits der Fall)}$$

Die Bedingung (1) ist erfüllt für $\alpha < -\frac{1}{4}$ sowie für $\alpha > \frac{1}{2}$, also konvergiert das Jacobi-Verfahren für $\alpha < -\frac{1}{4}$ sowie für $\alpha > \frac{1}{2}$ in jeder Norm.

2. **a)** Wie man im Bild sieht, gibt es 2 Lösungen (im Intervall $[-2, 2]$).



b) Die grösste Lösung ist bei $x \approx 1.6375$. Mögliche Startwerte für die Sekantenmethode sind also z.B. $x_0 = 1.6$, $x_1 = 1.7$.

Siehe nächstes Blatt!

Definiere $F := f - g$. Es folgt

$$x_2 = \frac{x_0 F(x_1) - x_1 F(x_0)}{F(x_1) - F(x_0)} = 1.636084\ldots$$
$$x_3 = \frac{x_1 F(x_2) - x_2 F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)} = 1.6375287\ldots$$

3. a)

x_i	0	2	6	8
f_i	0	4	1	α

Lagrange'sche Darstellung:

$$\ell_0(5) = \frac{(5-2)(5-6)(5-8)}{(0-2)(0-6)(0-8)} = -\frac{3\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 6\cdot 8} = -\frac{3}{32},$$
$$\ell_1(5) = \frac{(5-0)(5-6)(5-8)}{(2-0)(2-6)(2-8)} = \frac{5\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{5}{16},$$
$$\ell_2(5) = \frac{(5-0)(5-2)(5-8)}{(6-0)(6-2)(6-8)} = \frac{5\cdot 3\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{15}{16},$$
$$\ell_3(5) = \frac{(5-0)(5-2)(5-6)}{(8-0)(8-2)(8-6)} = -\frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 2} = -\frac{5}{32},$$
$$\Rightarrow P_3(5) = \sum_{i=0}^{3} f_i\,\ell_i(5) = 0\cdot\frac{-3}{32} + 4\cdot\frac{5}{16} + 1\cdot\frac{15}{16} + \alpha\cdot\frac{-5}{32} = \frac{5(14-\alpha)}{32}$$

ODER:
Baryzentrische Darstellung ($x = 5$):

$$\lambda_0 = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{-1}{2\cdot 6\cdot 8} = -\frac{1}{96}, \qquad \mu_0 = \frac{\lambda_0}{x-x_0} = -\frac{1}{480}$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{1}{48}, \qquad \mu_1 = \frac{\lambda_1}{x-x_1} = \frac{1}{144}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{-1}{6\cdot 4\cdot 2} = -\frac{1}{48}, \qquad \mu_2 = \frac{\lambda_2}{x-x_2} = \frac{1}{48}$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{8\cdot 6\cdot 2} = \frac{1}{96}, \qquad \mu_3 = \frac{\lambda_3}{x-x_3} = -\frac{1}{288}$$
$$\Rightarrow P_3(5) = \sum_{i=0}^{3}\mu_i f_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=0}^{3}\mu_i}_{(-3+10+30-5)/1440=\frac{1}{45}} = 45\left(0 + \frac{4}{144} + \frac{1}{48} - \frac{\alpha}{288}\right) = \frac{5(14-\alpha)}{32}$$

Bitte wenden!

b) Ziel: finde $P(x) := ax^2 + bx + c$, so dass $P(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$
\begin{aligned}
P(0) &= 0 \;\Leftrightarrow\; c = 0 && (2)\\
P(2) &= 4 \;\Leftrightarrow\; 4a + 2b + \underbrace{c}_{=0} = 4 && (3)\\
P(6) &= 1 \;\Leftrightarrow\; 36a + 6b + \underbrace{c}_{=0} = 1 && (4)\\
P(8) &= \alpha \;\Leftrightarrow\; 64a + 8b + \underbrace{c}_{=0} = \alpha && (5)
\end{aligned}
$$

Aus (3),(4) folgt $a = -\frac{11}{24}$, $b = \frac{35}{12}$ und mit (5) $\underline{\alpha = -6}$.

4. a)

$$
\begin{aligned}
&a = 0,\ b = 3,\ h_0 = 3\\
&s_0 = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(0 + \frac{3}{10}) = \frac{3}{20},\ T_0 = \frac{9}{20}, N_0 = 1\\
&h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{3}{2},\ s_1 = s_0 + f(a + h_1) = \frac{3}{20} + \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{20} + \frac{6}{13} = \frac{159}{260}\\
&T_1 = h_1 s_1 = \frac{477}{520} = 0.91730769\ldots
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
R_{0,0} &= T_0,\ R_{1,0} = T_1\\
\tilde{I} = R_{1,1} &= \frac{R_{1,0} - \frac{1}{4}R_{0,0}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{477}{520} - \frac{9}{80}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{954 - 117}{1040} = \frac{279}{260} = 1.0730769\ldots
\end{aligned}
$$

c)

$$
\frac{|\tilde{I} - I|}{|I|} = 0.0679372\ldots
$$

5. a)

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}^{k+1} &= \tilde{y}^k + \overline{h}\, f(t_k + \frac{\overline{h}}{2}, \frac{\tilde{y}^{k+1} + \tilde{y}^k}{2})\\
&= \tilde{y}^k + \frac{\overline{h}}{2} A \left(\tilde{y}^{k+1} + \tilde{y}^k\right)
\end{aligned}
$$

(Also ist $\tilde{y}^{k+1}$ die Lösung von $(I_2 - \frac{\overline{h}}{2}A)\,\tilde{y}^{k+1} = (I_2 + \frac{\overline{h}}{2}A)\,\tilde{y}^k$.)

b) Gesucht ist die Lösung von $(I_2 - \frac{\overline{h}}{2}A)\,\tilde{y}^1 = (I_2 + \frac{\overline{h}}{2}A)\,\tilde{y}^0$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(I_2 - \frac{\overline{h}}{2}A) &= \begin{pmatrix} 9/8 & -5/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},\\
(I_2 + \frac{\overline{h}}{2}A)\,\tilde{y}^0 &= \begin{pmatrix} 7/8 & 5/8 \\ 1/4 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/16 \\ 3/8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

Mit Gauss:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 9/8 & -5/8 & 19/6 \\ 2/9 & 1/4 & 3/4 & 3/8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 9/8 & -5/8 & 19/6 \\ 0 & 8/9 & 1/9 \end{array} \Rightarrow \tilde{y}^1 = \begin{pmatrix} 9/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

c)

```
function [y]=heunverfahren(f,t0,y0,n,h)
% Berechnet die n erste Schritte
% des Heun-verfahrens mit Schrittweite h
% fuer das Anfangswertproblem y'=f(t,y), y(t0)=y0
% Input:
%   f       extern definerte Funktion
%   t0      Anfangszeit
%   y0      Anfangswert
%   n       Anzahl Schritte
%   h       Schrittweite
% Output:
%   y       Matrix [y0, y^1, ... , y^n], wobei y^k
%           die Approximation zu y(t_k) ist

 y=zeros(length(y0),n+1);       %Initialisierung der Loesungsmatrix
 y(:,1)= y0;                    %Initialisierung der Anfangsbed.
 %Iteration in der Zeit
 for k=1:n
     y_old=y(:,k);
     f_=f(t0+(k-1)*h,y_old);
     y_euler=y_old+h*f_;
     y(:,k+1)=y_old+h/2*(f_+f(t0+k*h,y_euler));
 end

end
```

6. **a)** Da $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, gilt $c = 1$ und damit $\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$. Also

$$\begin{aligned}\tilde{u}_j^{k+1} &= 2\tilde{u}_j^k + \underbrace{c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}}_{=\lambda^2=1}\left(\tilde{u}_{j+1}^k - 2\tilde{u}_j^k + \tilde{u}_{j-1}^k\right) - \tilde{u}_j^{k-1} \\ &= \tilde{u}_{j+1}^k + \tilde{u}_{j-1}^k - \tilde{u}_j^{k-1}\end{aligned}$$

b) $t_1 = 0.25$, $T = t_2 = 0.5$, $x_j = j \cdot \Delta x$, $j = 0, \ldots, 4$. Aus den Anfangsbedingungen hat man

$$\tilde{u}_0^0 = 0,\ \tilde{u}_1^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tilde{u}_2^0 = 1,\ \tilde{u}_3^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tilde{u}_4^0 = 0,$$

und aus den Randbedingungen gilt

$$\tilde{u}_0^1 = \tilde{u}_4^1 = \tilde{u}_0^2 = \tilde{u}_4^2 = 0.$$

Bitte wenden!

Mit den ersten Termen der Taylor-Entwicklung kann man $\underline{\tilde{u}}^1$ approximieren als

$$\tilde{u}_j^1 = \tilde{u}_j^0 + \Delta t \cdot \underbrace{\psi(x_j)}_{=0} = \tilde{u}_j^0, \; j = 1, 2, 3.$$

Mit dem Differenzenverfahren kann man nun $\underline{\tilde{u}}^2$ erhalten:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1^2 &= 2\tilde{u}_1^1 + \tilde{u}_2^1 - 2\tilde{u}_1^1 + \tilde{u}_0^1 - \tilde{u}_1^0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0.2928932\ldots \\
\tilde{u}_2^2 &= 2\tilde{u}_2^1 + \tilde{u}_3^1 - 2\tilde{u}_2^1 + \tilde{u}_1^1 - \tilde{u}_2^0 = \sqrt{2} - 1 = 0.4142135\ldots \\
\tilde{u}_3^2 &= 2\tilde{u}_3^1 + \tilde{u}_4^1 - 2\tilde{u}_3^1 + \tilde{u}_2^1 - \tilde{u}_3^0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0.2928932\ldots
\end{aligned}$$

Die CFL-Bedingung ist erfüllt, denn $\lambda = 1$.

c) Exakt: $u(T, x) = \cos(\pi/2)\sin(\pi x) = 0, \; \forall x$

$$\Rightarrow |u(T, \underline{x}) - \underline{\tilde{u}}^2| = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \; \sqrt{2} - 1, \; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^\top .$$