BSc D-MAVT, ETH Zürich
Numerische Mathematik
Lösung der Prüfung
Winter 2010

Prof. K.Nipp

— • —

1.
```
function [x_new,iter_N,iter_B]=Bisektion_Newton(a,b,rtol,atol,maxit)
% Nullstellenbestimmung von f(x)=0 (unten im Code zu definieren) durch
% Kombination von Bisektionsverfahren (konvergiert immer, aber langsam)
% und Newton (schnelle Konvergenz, aber lokal).
%   Input:
% a,b      Startintervall [a,b] fuer das Bisektionsverfahren
%   (eine Loesung x von f(x)=0 muss in [a,b] sein, d.h. f(a)*f(b)<0)
% rtol     relative Toleranz
% atol     absolute Toleranz
% maxit    maximale Anzahl Newton-Iterationen
%   Output:
% x_new    Approximative Loesung zu f(x)=0
% iter_N   Anzahl durchgefuehrter Newton-Iterationen
% iter_B   Anzahl durchgefuehrter Iterationen mit dem
%          Bisketionsverfahren

iter_N=0;
iter_B=0;
if abs(f(a))<atol
   x_new=a;
   return
elseif abs(f(b))<atol
   x_new=b;
   return
elseif f(a)*f(b)>0 || a>=b
   error('Es muss f(a)*f(b)<0 und a<b gelten!!!')
end

% 4 Schritte Bisektionsverfahren (Suchintervall 16 mal kleiner)
[x_old,a,b,iter]= n_Schritte_Bisektion(a,b,4,rtol,atol);   % (*)

iter_B=   iter_B+iter;    % (**)
% Newton
for iter_N=1:maxit
```

Bitte wenden!

```
Delta=  -Df(x_old)\ f(x_old);

    x_new = x_old + Delta;
    if norm(x_new-x_old)<rtol*norm(x_new)+atol
      return
    end
    if x_new>b || x_new<a
        % Verkleinere Suchintervall mit 4 Schritten des
        % Bisektionsverfahrens falls x_new ausserhalb von [a,b]

        [x_old,a,b,iter]=n_Schritte_Bisektion(a,b,4,rtol,atol);
        iter_B=iter_B+iter;
    else
        x_old =  x_new;
    end


 end
 if iter==maxit
    disp(['Keine Konvergenz nach ',num2str(maxit),' Iterationen'])
 end
end

function[Df_]=Df(x)
 Df_=1/x^3-2*log(x)/x^3; % Berechnet f'(x)
end

function[f_]=f(x)
 f_=  log(x)/x^2;
end


 function [x_bis,a,b,iter]=n_Schritte_Bisektion(a,b,n,rtol,atol)
 % Fuehrt n Schritte des Bisketionsverfahrens durch.
 %   Input:
 % a,b,rtol,atol     wie oben
 % n                 (maximale) Anzahl Schritte
 %   Output:
 % x_bis    Approximative Loesung zu f(x)=0
 % a,b      neues Suchintervall
 % iter     Anzahl durchgefuehrter Iterationen (<=n)

 x0=  (a+b)/2;

 for iter=  1:n
    if abs(f(x0))<atol
```

Siehe nächstes Blatt!

```
        x_bis=x0;
        return
    end
    if f(a)*f(x0)<0
        b= x0;

    else
        a=x0;
    end
    x_bis=(a+b)/2;
    if abs(x_bis-x0)<=abs(x_bis)*rtol+atol
        return
    end
    x0=x_bis;
  end
end
```

2. a)

i	0	1	2	3
x_i	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
f_i	e	$\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$	e^{-1}

$$\ell_0(x) = \frac{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-1+\frac{1}{3})(-1-\frac{1}{3})(-1-1)} = \frac{(x^2-\frac{1}{9})(x-1)}{(-\frac{2}{3})(-\frac{4}{3})(-2)} \Rightarrow \ell_0(0) = -\frac{1}{16}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-\frac{1}{3}+1)(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)} = \frac{(x-\frac{1}{3})(x^2-1)}{\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{4}{3})} \Rightarrow \ell_1(0) = \frac{9}{16}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)} = \frac{(x+\frac{1}{3})(x^2-1)}{\frac{4}{3}\frac{2}{3}(-\frac{2}{3})} \Rightarrow \ell_2(0) = \frac{9}{16}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{(1+1)(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})} = \frac{(x+1)(x^2-\frac{1}{9})}{2\frac{4}{3}\frac{2}{3}} \Rightarrow \ell_3(0) = -\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow P_3(0) = \sum_{i=0}^{3} f_i\,\ell_i(0) = \frac{1}{16}(-\mathrm{e}+9\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})-\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.995195771956776$$

b) $h = 1-(-1) = 2$, $t = \frac{0-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$. Berechne $Q(t)$ mit dem Differenzenschema ($f'(-1)$ und $f'(1)$ exakt berechnen):

$\alpha_0 = f(-1) = \mathrm{e} = 2.718281\ldots$, $\alpha_1 = f(1) = \mathrm{e}^{-1} = 0.367879\ldots$,
$\beta_{-1} = -2f'(-1) = -2\mathrm{e} = -5.436563\ldots$, $\beta_0 = \alpha_1 - \alpha_0 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} = -2.350402\ldots$,
$\beta_1 = -2\mathrm{e}^{-1} = -0.735758\ldots$,
$\gamma_0 = \beta_0 - \beta_{-1} = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 3.086161\ldots$, $\gamma_1 = \beta_1 - \beta_0 = \mathrm{e} - 3\mathrm{e}^{-1} = 1.614643\ldots$,
$\delta_0 = \gamma_1 - \gamma_0 = -4\mathrm{e}^{-1} = -1.471517\ldots$

$$\Rightarrow g(0) = Q(\frac{1}{2}) = \alpha_0 + \frac{1}{2}[\beta_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0+\delta_0)\frac{1}{2}] = \frac{1}{4}\mathrm{e} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.955480037993343.$$

Bitte wenden!

3. **a)** $s = 2$.

b) Da $a_{12} = \frac{1}{2} \neq 0$, ist das Verfahren implizit.

c) Nach dem Butcher-Tableau haben wir das Verfahren (Trapezregel)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, x_0), \\ k_2 &= f(t_0 + h, x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)), \\ x_1 &= x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0) + \frac{h}{2} k_2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (1) sollte bis und mit Termen 2. Ordnung in h mit der Taylorentwicklung der Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

übereinstimmen.

Es gilt (Taylor)

$$\begin{aligned} x(t_0 + h) &= x(t_0) + h\dot{x}(t_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(t_0) + O(h^3) \\ &= x_0 + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2} f_t(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2} f_x(t_0, x_0) f(t_0, x_0) + O(h^3), \qquad (*) \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0), \qquad \ddot{x}(t_0) = f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0) . f(t_0, x_0)$$

Die Taylorentwicklung von k_2 liefert

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_0 + h, x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)) \\ &= f(t_0, x_0) + hf_t(t_0, x_0) + \frac{h}{2}(f(t_0, x_0) + k_2) f_x(t_0, x_0) + O(h^2) \\ &\overset{k_2 = f(t_0, x_0) + O(h)}{=} f(t_0, x_0) + hf_t(t_0, x_0) + hf(t_0, x_0) f_x(t_0, x_0) + O(h^2). \end{aligned}$$

Also

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2} f_t(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2} f_x(t_0, x_0) f(t_0, x_0) + O(h^3),$$

was mit (*) übereinstimmt.

4. **a)** Da $u''(x) = -\sin(\pi x)$, gilt

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int -\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + a, \\ \Rightarrow \quad u(x) &= \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + ax + b. \end{aligned}$$

RB: Aus $0 \overset{!}{=} u(0) = b$ folgt $b = 0$. Aus $-1 \overset{!}{=} u(1) = \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + a + \underbrace{b}_{=0}$ folgt $a = -1$,

also hat man

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - x.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Um den u_{xx}-Term zu approximieren, benütze:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Betrachte $x_i = h \cdot i = \frac{i}{4}$, $i = 0, \ldots, 4$, $\tilde{u}_i \approx u(x_i)$. Aus den Randbedingungen folgt $\tilde{u}_0 = 0$, $\tilde{u}_4 = -1$. Mit dem Differenzenverfahren folgt

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrr|l} -32 & 16 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 16 & -32 & 16 & -1 \\ 0 & 16 & -32 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 16 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr|l} -32 & 16 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -24 & 16 & -1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 16 & -32 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 16 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrr|l} -32 & 16 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 16 & 32 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 16 \\ 0 & 0 & -32 & 23 - \frac{2}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_3 = \frac{\sqrt{2} - 23}{32} \approx -0.1745558, \Rightarrow \tilde{u}_2 = \frac{1 - 7\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} \approx -0.3933058,$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_1 = \frac{7 - \sqrt{2}}{32} \approx -0.6745558.$$

5. a) Rückwärts-Vektoriteration:

$$y^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \; N = \|y^0\| = \sqrt{29} = 5.3851648\ldots,$$

$$\hat{x}^0 = \text{sign}(y_1^0)\frac{1}{N}y^0 = \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.92847669\ldots \\ 0.37139067\ldots \end{pmatrix}$$

Löse $Ay^1 = \hat{x}^0$ entweder direkt oder mit LRP-Zerlegung. Direkt:

$$\begin{array}{rr|l} 0 & -2 & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ -2 & 3 & \frac{2}{\sqrt{29}} \end{array} \Rightarrow y^1 = \frac{1}{4\sqrt{29}}\begin{pmatrix} -19 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.88205285\ldots \\ -0.46423834\ldots \end{pmatrix}.$$

y^1 ist die gesuchte Approximation des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda = -1$.

b) Vorwärts-Vektoriteration:

$$y^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; N = \|y^0\|_2 = \sqrt{13} = 3.60555127\ldots,$$

$$\hat{x}^0 = \text{sign}(y_1^0)\frac{1}{N}y^0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.554700196\ldots \\ -0.832050294\ldots \end{pmatrix},$$

$$y^1 = A\hat{x}^0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 6 \\ -13 \end{pmatrix}, \; N = \|y^1\|_2 = \frac{\sqrt{205}}{\sqrt{13}} = 3.971049\ldots.$$

Bitte wenden!

Als Approximation zum gesuchten (betragsmässig) grössten Eigenwert von A erhält man also

$$\hat{\lambda}_2 = \mathrm{sign}(y_1^1)N = 3.971049\ldots.$$

c) Exakte Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
&\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = -1, 4 \\
&\Rightarrow \frac{|\lambda_2 - \hat{\lambda}_2|}{|\lambda_2|} = 0.00723773\ldots
\end{aligned}$$

6. a) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned}
k_1 =& f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1), \\
\overline{x} =& x + hk_1, \;\Rightarrow\; k_1 = \frac{\overline{x} - x}{h} \\
\Rightarrow k_1 =& f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{\overline{x} - x}{2}) = f(t + \frac{h}{2}, \frac{\overline{x} + x}{2}).
\end{aligned}$$

Also hier:

$$\begin{aligned}
\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \overline{x}_2 + x_2 \\ -\overline{x}_1 - x_1 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{h^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{4} & h \\ -h & 1 - \frac{h^2}{4} \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Sei $x \in K$ (d.h. $\|x\|_2 = R > 0$). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}\|_2^2 =& \overline{x}^\top \overline{x} = x^\top M^\top M x = x^\top \frac{1}{(1 + \frac{h^2}{4})^2} \begin{pmatrix} (1 - \frac{h^2}{4})^2 + h^2 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{h^2}{4})^2 + h^2 \end{pmatrix} x \\
=& \frac{(1 - \frac{h^2}{4})^2 + h^2}{(1 + \frac{h^2}{4})^2} x^\top x = \frac{(1 + \frac{h^2}{4})^2}{(1 + \frac{h^2}{4})^2} \|x\|_2^2 = R^2,
\end{aligned}$$

damit ist $\overline{x} \in K$.