ETHZ, D-MAVT
Prüfung Früling 2005
Numerische Mathematik
K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Von einer Funktion $f(x)$ seien die folgenden Daten bekannt

x_i	1	2	3
f_i	1	3	4

Gesucht ist der Wert des Integrals

$$I = \int_1^3 f(x)dx$$

a) Berechnen Sie I mit stückweise linearer Interpolation.

b) Berechnen Sie I mit Lagrange-Interpolation.

2. Gegeben sei der Vektor $b = (1, 1, 1)^T$ und die Matrizen

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 \\ -1 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man möchte das lineare Gleichungs system $Ax = b$ für i), ii) mit der Methode der Konjugierten Gradienten (CG) lösen.

a) Was sind die Vorausssetzungen an A, damit CG anwendbar ist? Ist CG in den Fällen i), ii), anwendbar? (Begründung!)

b) Falls CG anwendbar ist in i), ii), führen Sie einen Schritt durch.

c) Würde exakt gerechnet, nach wievielen Schritten liefert CG spätestens die Lösung von $Ax = b$?

3. Wir betrachten eine Spline-Interpolierende mit den folgenden Eigenschaften: Am linken Rand sei $f_1' = 0$, am rechten Rand gelte die 'not-a-knot' Bedingung

$$\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) f_{n-1}' + \frac{1}{h_{n-1}} f_n' = 2c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_{n-2}} (c_{n-1} + c_{n-2}).$$

Legen Sie eine solche Spline-Interpolierende durch die Daten

x_i	0	1	2	3
f_i	0	2	1	-1

und werten Sie sie aus an der Stelle $x = 1.5$.

4. Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + \sin 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Führen Sie zwei Schritte des Quasi-Newton-Verfahrens durch mit den Startwerten $x_1 = 2$, $x_2 = \pi/2$ (Benutzen Sie die LR-Zerlegung der Jacobi–Matrix).

5. Für ein lineares Ausgleichsproblem seien die folgenden Fehlergleichungen gegeben

$$Ax - c = r.$$

mit $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Lösung x dieses Ausgleichsproblems mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) von A, gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Falls x nicht eindeutig bestimmit ist, geben Sie diejenige Lösung x an mit der kleinsten 2-Norm.

6. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \exp\frac{xt}{2}, \qquad x(0) = 1.$$

Man möchte die Lösung approximieren mit Hilfe der Prediktor-Korrektor-Methode, bei der als Prediktor die explizite Euler-Methode und als Korrektor die Trapez-Methode

$$\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \frac{h}{2}\left(f(t_j, \tilde{x}_j) + f(t_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})\right)$$

verwendet wird.

a) Führen Sie zwei Schritte des Verfahrens durch mit $h = 0.1$.

b) Geben Sie für dieses Prediktor-Korrektor-Verfahren das Butcher-Tableau an.

c) Ist dieses Verfahren explizit order implizit? (Begründung!)