# ETHZ, D-MAVT
## Prüfung Herbst 2005
# **Numerische Mathematik**
## K. Nipp

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung (120 Minuten)!
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!
- Hilfsmittel: 10 A4-Seiten eigene Notizen, Taschenrechner!

— • —

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.01 & 2.0 & 0 \\ 2.0 & 2.0 & 1.0 \\ 0 & 1.0 & 2.0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die LR-Zerlung der Matrix $A$ und die Lösung des linearen Gleichungssytems auf die folgenden zwei Arten:

i) in dem alle berechneten Werte auf eine Ziffer gerundet werden (Computer mit Maschinenzahlen $\mathbb{M}(10, 1, \cdot)$), ohne die Zeilen in (1) zu vertauschen;

ii) wie in i), aber indem Sie die Spalten-Maximium-Strategie anwenden.

2. Die Viskoisität $\mu$ von Öl variiert mit der Temperatur $T$ wie folgt

| $T$ | 2 | 10 | 38 |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | 50.1 | 10 | 4.9 |

Ein Modell für die Viskosität ist das folgende:

$$\mu = \mu_0 T^k. \tag{2}$$

Die Konstanten $\mu_0$ und $k$ sollen aus den obigen Daten mit Hilfe der Ausgleichsrechnung bestimmt werden.

*Hinweis: Führen Sie das Problem auf ein lineares Ausgleichproblem zurück mit den Grössen* $\ln(\mu_0)$ *und* $k$.

3. a) Bestimmen Sie den Fehler der Interpolationspolynoms von Grad $\leq 2$ im Intervall $I = [x_0, x_0 + 2h]$ (quadratische Interpolation) unter der Annahme, dass $|f'''(x)| \leq M_3,\ x \in I$.

b) Von einer gesuchten Funktion $f(x)$ seien die Funktionswerte $f_j$ an den Stützstellen $x_j$, $j = 0, 1, 2, 3$ bekannt:

| $x_j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f_j$ | 0 | 2 | 1 | 5 |

Bestimmen Sie das Interpolationspolyom nach Lagrange an der Stelle $x = 3/2$.

4. Das bestimmte Integral $I = \int_0^\pi \sin x \, dx$ soll durch die folgende Integrationsmethode der Ordnung 4 approximiert werden

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right] + O(h^4), \tag{3}$$

wobei $h = (b-a)/3$, und zwar wie folgt:

i) mit einem Schritt;

ii) mit zwei Schritten;

iii) mit Extrapolation nach Rhomberg mit Hilfe von i), ii).

5. Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - \frac{9}{4} = 0. \tag{4}$$

a) i) Die Gleichung (4) kann auch geschrieben werden in der Form

$$\alpha = F(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{9}{4} + 4\alpha^3 - \alpha^4\right)}.$$

Zeigen Sie (graphisch), dass der Banachsche Fixpunktsatz für $\alpha \in [0,1]$ erfüllt ist;

ii) Berechnen Sie für den Startwert $\alpha_0 = 1/2$ die erste Iterierte $\alpha_1$.

b) i) Formulieren Sie den allgemeinen Newton-Schritt für die Gleichung (4);

ii) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Lösung von (4) mit dem Newton-Verfahren approximiert auf eine vorgegebene Toleranz TOL genau.

6. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{x_1 x_2} + x_2 - 1.8 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 0.8 \end{aligned} \tag{5}$$

a) Formulieren Sie das implizite Eulerverfahren für das System (5);

b) Führen Sie einen Schritt des Verfahrens durch mit $h = 0.1$ und mit Startwerten $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0.5$. Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem mit einem Quasi-Newtonschritt.