V.4 Wavelets

- Datenkompression
- PDEs: hierarchische Basis bei FEM

Fourier-Analysis (zur Erinnerung)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad 2\pi\text{-periodisch}$$

Fourier-Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \qquad \text{(Synthese)}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt\,, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(Analysis)}$$

Analysierende Fktn'en: $e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$

bilden ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}/2\pi)$

bzgl. $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$

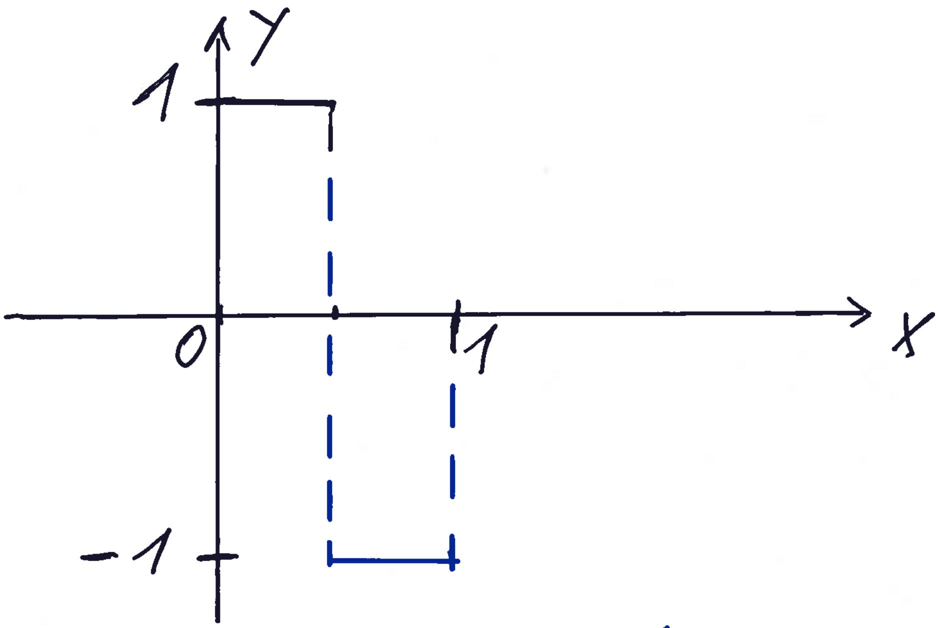
$$\left[\quad c_k = \langle f_k, e^{ik} \rangle \quad \right]$$

2π-periodisch, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

Approximierendes Fourier-Polynom:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \cong f(x) \quad \xrightarrow[DFT]{} \quad \tilde{c}_k$$

Haar-Wavelet



$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Mutterwavelet)}$$

hat kompakten Träger; und

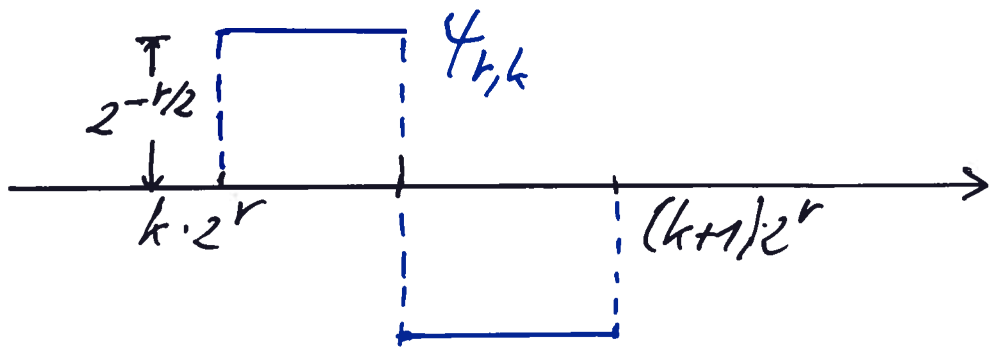
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_H(x)|^2\,dx = 1.$$

Definiere Wavelet-Funktionen

$$\psi_{r,k}(x) = 2^{-r/2}\,\psi_H\left(\frac{x-k\cdot 2^r}{2^r}\right), \quad r,k\in\mathbb{Z}$$

mit Träger $I_{r,k} = [k\cdot 2^r, (k+1)2^r[$ der Länge 2^r

(Haar-Wavelets verschoben und diladiert)



*)

$$\|\psi_{r,k}\|^2 := \langle\psi_{r,k},\psi_{r,k}\rangle := \int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{r,k}(x)|^2\,dx = 1 \qquad (\Delta)$$

Beh.: Die $\psi_{r,k}$, $r,k\in\mathbb{Z}$, bilden eine orthonormierte Basis von $L^2(\mathbb{R})$ bez. $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$f(x) = \sum_{r,k=-\infty}^{\infty} c_{r,k}\,\psi_{r,k}(x)$$

$$c_{r,k} = \langle f,\psi_{r,k}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi_{r,k}(x)\,dx\,.$$

---

*) Je grösser r, desto flacher und breiter; je grösser k, desto weiter verschoben.

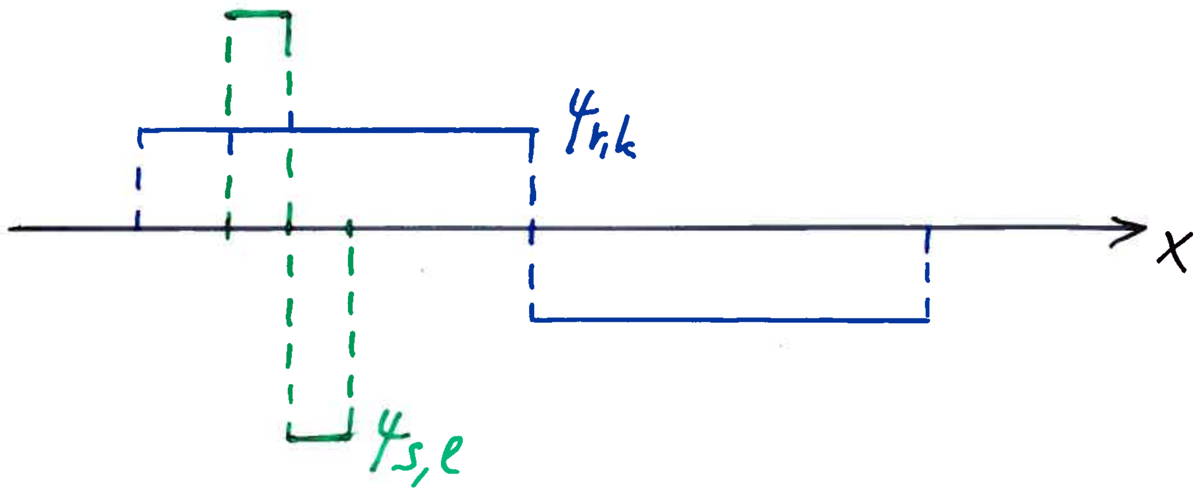
'Konstruktiver Bew.':

Gilt: Für $k \neq l$: $\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = 0$

(disjunkter Träger)

Ist zudem $s < r$, dann ist $\psi_{r,k}$ auf dem Träger von $\psi_{s,l}$ konstant ($= -1, 0$ oder 1)

$$\Rightarrow \quad \langle \psi_{r,k}, \psi_{s,l} \rangle = 0, \quad s \neq r, \quad \forall k, l$$

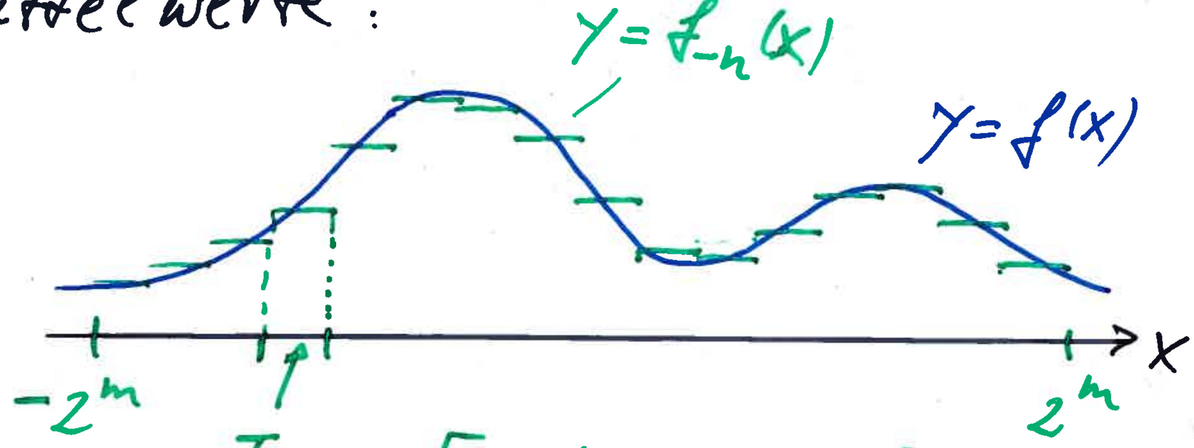


Also mit (Δ) folgt: $\psi_{r,k}$ bilden Orthonormalsystem.

Um 'erzeugend' zu zeigen, genügt es f zu betrachten mit: $\exists$ m, n so dass

- $f(x) \equiv 0$, $\quad |x| \geq 2^m$
- f ist Treppenfkt, konstant auf $I_{-n,k}$ der Länge 2^{-n}

d.h. approximiere bel. $f \in L^2$ durch Mittelwerte:



$I_{-n,k} = [k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}[$, Länge 2^{-n}

und $f_{-n}(x) \equiv 0$, $|x| \geq 2^m$.

Definiere Folge von approxim. Waveletpolynomen

$$\Psi_r := \sum_{j=-n+1}^{r} \left(\sum_k c_{j,k} \psi_{j,k} \right),$$

$$r = -n, -n+1, \ldots$$

$$f = \Psi_r + \underbrace{f_r}_{\substack{= \text{konst.} \\ = f_{r,k},\ x \in I_{r,k}}} \qquad k = -2^{m-r}, \ldots, 2^{m-r} - 1$$

(MW von f auf $I_{r,k}$)

Start: $\Psi_{-n} = 0$, f_{-n}

$r' = r+1$:

$$d_{r',k} := \frac{1}{2} \left(f_{r,2k} - f_{r,2k+1} \right)$$

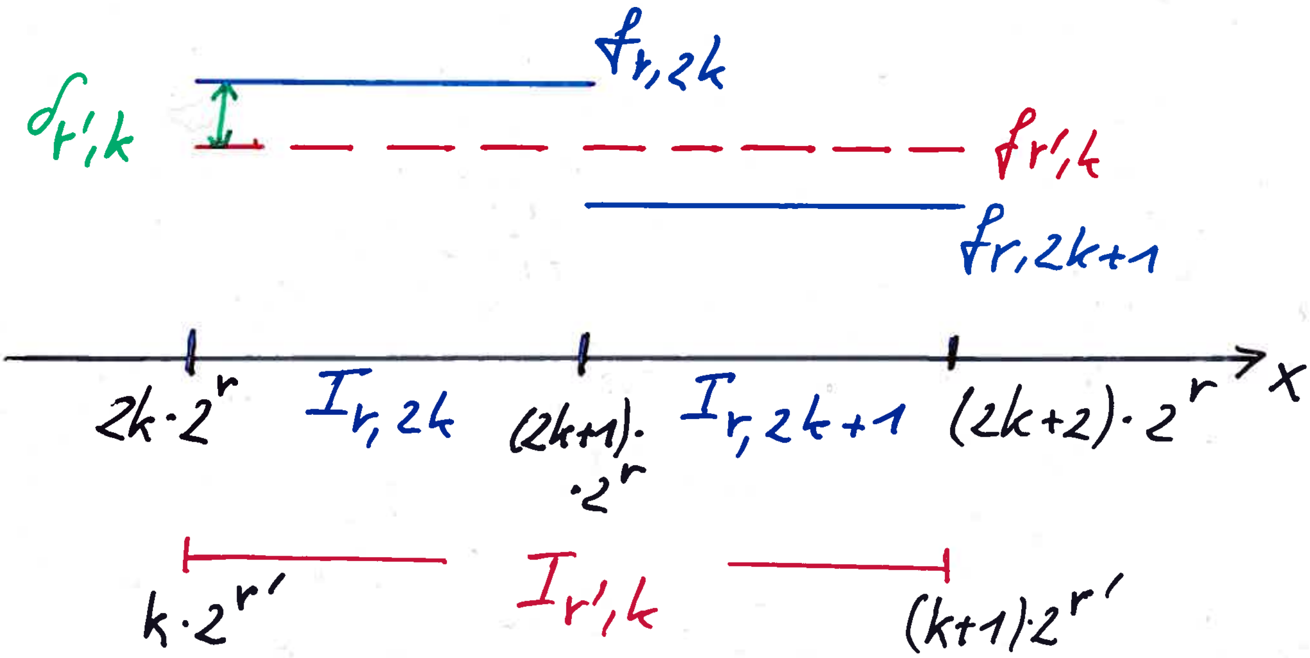
$$c_{r',k} := 2^{r'/2} d_{r',k}$$

$$f_{r',k} := \frac{1}{2} \left(f_{r,2k} + f_{r,2k+1} \right)$$

$$\Phi_{r'} := \Phi_r + \sum_k c_{r',k} \, \psi_{r',k}$$

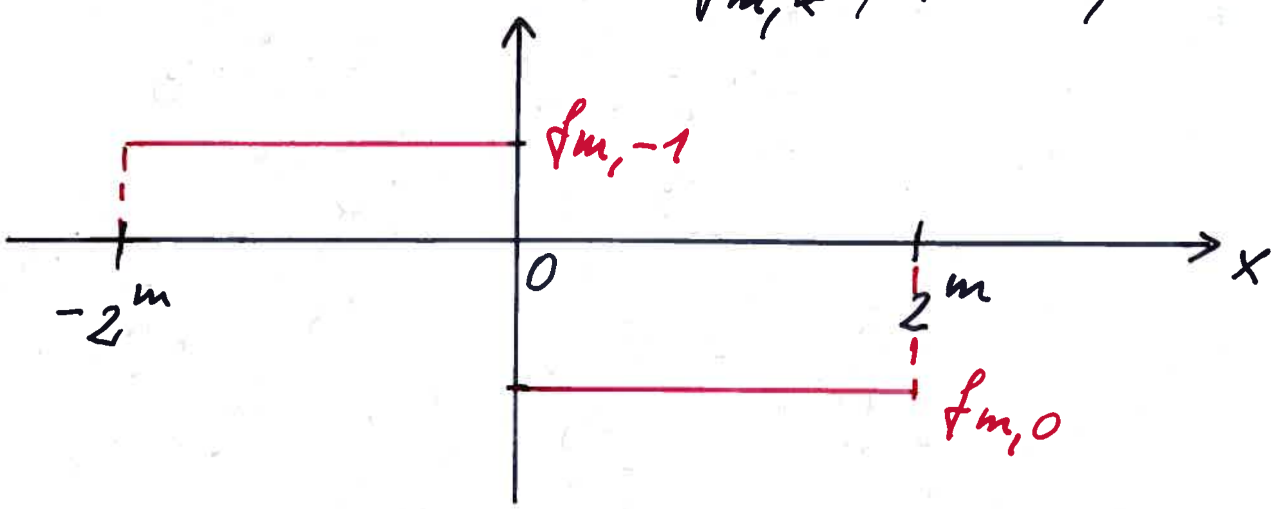
Dann gilt für $f_{r'} := f_{-n} - \Phi_{r'}$:

$$f_{r'}(x) = f_{r',k} \, , \quad x \in I_{r',k}$$



Nach m+n Schritten :

$$f_{-n} = \Phi_m + \underbrace{f_m}_{= f_{m,k} \, , \ k = -1, 0}$$



Bem.: f_m kann als Linearkombin. von zwei Haar-Wavelets dargestellt werden:

$$f_m = \underbrace{\tilde{c}_{m,-1}}_{\pm\{f_{m,-1}\}=:A} \cdot \psi_H\left(\frac{x+2^{m+1}}{2^{m+1}}\right) + \underbrace{\tilde{c}_{m,0}}_{\pm\{f_{m,0}\}=:B} \cdot \psi_H\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right)$$

(allerdings mit Träger $[-2^{m+1},0[$ bzw. $[0,2^{m+1}[$)

Für den Bew.: Weiter verdoppeln mit f_m:

weitere p Schritte $f_m = \sum_{j=m+1}^{m+p}\left(\sum_k c_{j,k}\psi_{j,k}\right) + \underbrace{f_{m+p}}_{= f_{m+p,k},\ k=-1,0}$

mit $f_{m+p,-1} = 2^{-p}\cdot A$

$f_{m+p,0} = 2^{-p}\cdot B$ (da $f_{-n} \equiv 0$, $|x| \geq 2^m$)

$$\Longrightarrow \|f_{m+p}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{m+p}(x)|^2 dx = 2^{m+p}\left(2^{-2p}|A|^2 + 2^{-2p}|B|^2\right)$$

$$= 2^m\left(|A|^2+|B|^2\right)\cdot 2^{-p}$$

bzw. $$\|f_{m+p}\| = 2^{m/2}\cdot\sqrt{|A|^2+|B|^2}\cdot 2^{-p/2}$$

$p \to \infty$: $$\|f_{-n} - \Psi_{m+p}\| = \|f_{m+p}\| \leq C\cdot 2^{-p/2} \to 0$$

'Q.E.D.'

Liefert 'schnellen' Algorithmus
mit $m+n$ Schritten.

Anz. Anfangsdaten $N := 2 \cdot 2^{m+n}$

• N Intervalle

1. Schritt: $\frac{N}{2}$ Intervalle / Daten (c_{jk})

⋮

$(m+n)$. Schritt: 2 " / "

2 zusätzl. φ_H: 2

$$\sum_{j=1}^{m+n} 2 \cdot 2^{j-1} + 2 = 2(2^{m+n} - 1) + 2 = 2 \cdot 2^{m+n} = N$$

Daten

Pro Schritt: 2 Additionen (+ Skalierung) pro Intervallpaar

Berechnung der g_{jk} (Analyse)

$$\frac{N}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \cdot 2 \leq 2N \text{ Add.}$$

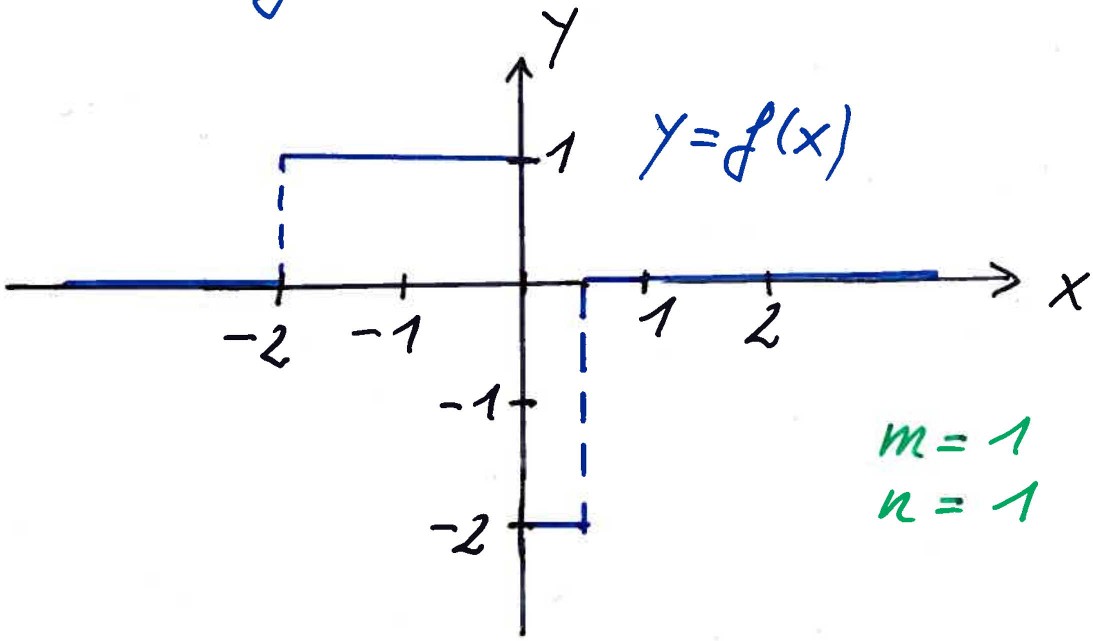
Synthese: analoger Algor. / Aufwand.

Bem.: – Es gibt viele Arten von Mutter-Wavelets
• alles analog zum Haar-W.

– MATLAB: wavedec (Analyse)
wavedec (Synthese)

(s. Übungen)

Bsp:



$m = 1$
$n = 1$

$r = -n = -1$: Anfangsdaten

	$I_{-1,-4}$	$I_{-1,-3}$	$I_{-1,-2}$	$I_{-1,-1}$	$I_{-1,0}$	$I_{-1,1}$	$I_{-1,2}$	$I_{-1,3}$
	$=[-2,-\frac{3}{2}[$							$=[\frac{3}{2},2[$
$f_{-1,k}$:	1	1	1	1	−2	0	0	0

$$\Psi_{-1} = 0, \quad f_{-1} = f$$

$\underline{r=0}$ (1. Schritt):

$I_{0,-2}$	$I_{0,-1}$	$I_{0,0}$	$I_{0,1}$
$[-2,-1[$	$[-1,0[$	$[0,1[$	$[1,2[$
$d_{0,-2}=0$	$d_{0,-1}=0$	$d_{0,0}=-1$	$d_{0,1}=0$
$c_{0,-2}=0$	$c_{0,-1}=0$	$c_{0,0}=-1$	$c_{0,1}=0$
$f_{0,-2}=1$	$f_{0,-1}=1$	$f_{0,0}=-1$	$f_{0,1}=0$

$$\Phi_0 = -\underbrace{\psi_{0,0}}_{=\psi_H(x)} \; ; \; f_0 = f_{0,k} \, , \, k=-2,-1,0,1$$

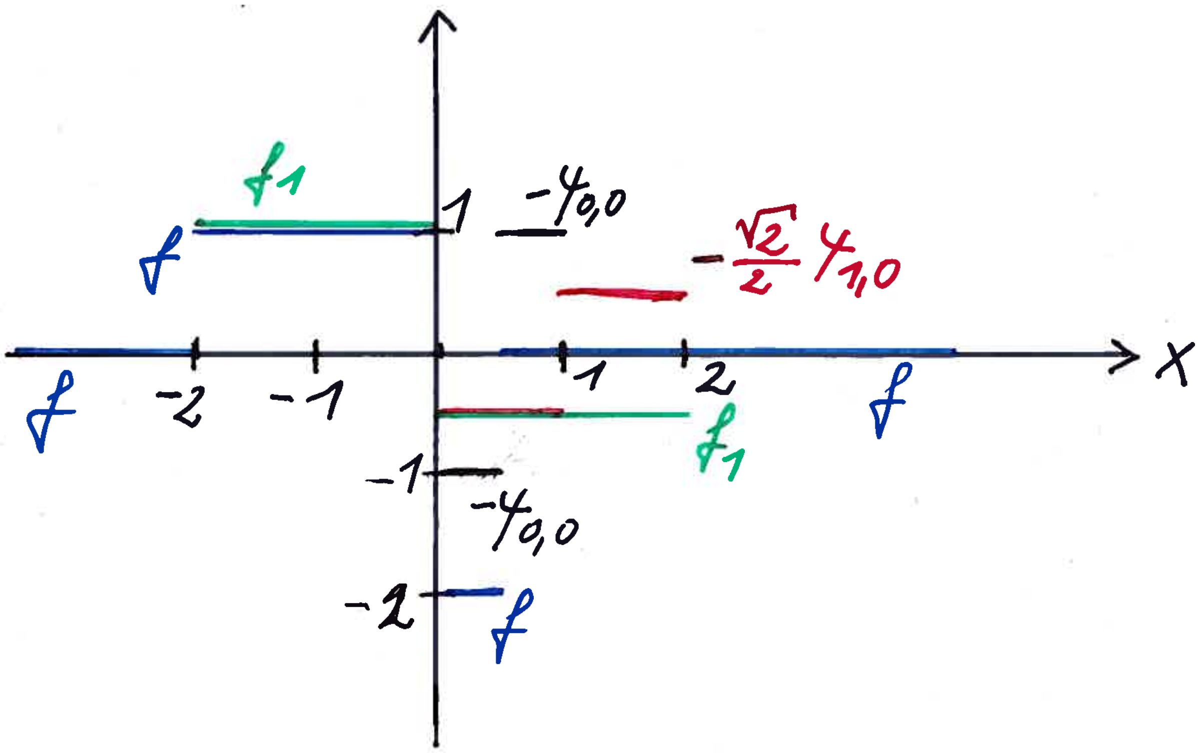
$\underline{r=1}$:

$I_{1,-1}$	$I_{1,0}$
$[-2,0[$	$[0,2[$
$d_{1,-1}=0$	$d_{1,0}=-\frac{1}{2}$
$c_{1,-1}=0$	$c_{1,0}=-\sqrt{2}/2$
$f_{1,-1}=1$	$f_{1,0}=-\frac{1}{2}$

$$\Phi_1 = \Phi_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\psi_{1,0}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_H\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$f_1 = f_{1,k} \, , \, k=-1,0$$

$$\underbrace{\Phi_1}_{= -\psi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_{1,0}(x)} + f_1 = f :$$



'Rest':

$$f_1 = -\psi_H\left(\frac{x+4}{4}\right) - \frac{1}{2}\psi_H\left(\frac{x}{4}\right)$$

$[-4,0[\qquad\qquad [0,4[$

Anfangsdaten

$f_{-1,k}$: $1, 1; 1, 1; -2, 0; 0, 0$

Analyse

$c_{r,k}$:

$0 \quad 0 \quad -1 \quad 0$

$0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-1 \quad -\frac{1}{2}$