Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Musterlösung 2

1. **a)** Es gilt

$$x = x + 1 - xe^x \Leftrightarrow xe^x - 1 = 0.$$

Wegen der Konsistenz genügt es zu zeigen, dass die Gleichung $f(x) := xe^x - 1 = 0$ genau eine Lösung auf dem Interval $[0, 1]$ besitzt. Es gilt $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Die Funktion ist also streng monoton steigend auf dem Interval und es kann maximal eine Lösung geben. Da $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = e - 1 > 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz der Analysis eine Lösung.

b) Man rechnet leicht nach, dass $e^{-0.5} < 0.65$, $e^{-0.65} > 0.5$ und Φ_1 monoton fallend ist. Die Funktion Φ_1 ist also eine Selbstabbildung auf $[0.5,\ 0.65]$. Es gilt $|\Phi_1'(x)| = |-e^{-x}| \leq e^{-0.5} < 1$ für $x \in [0.5,\ 0.65]$. Aus Satz I.2 folgt dann, dass die Folge linear konvergiert. Wie im Beweis von Satz I.2 folgt, dass $L = e^{-0.5}$ eine Lipschitzkonstante von Φ_1 ist. Aus Satz I.1 (4) folgt zudem, dass

$$|x^{(k)} - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq 1.6|x^{(k)} - x^{(k-1)}|$$

gilt. Als Abbruchbedingung wählen wir $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq {}^{10^{-15}}/_{1.6}$.

c) Der Folge der Iterationen scheint nicht zu konvergieren sondern sich vom Fixpunkt "abzustossen ". Es gilt

$$\Phi_3'(x^*) = 1 - x^* e^{x^*} - e^{x^*} = -e^{x^*} < -e^{0.5} \approx -1.6.$$

Betrachtet man also einen Punkt $x \approx x^*$ so gilt

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) &\approx \Phi_3(x^*) + \Phi_3'(x^*)(x - x*) \\ \Rightarrow |\Phi_3(x) - x^*| &\approx 1.6|x - x*| \end{aligned}$$

Die Distanz zum Fixpunkt wird also in jedem Schritt um ca. den Faktor 1.6 grösser.

d) Offensichtlich konvergiert die Folge für $x^{(0)} = x^*$ gegen x^*. Es gilt $\Phi_3'(x) = 1 - (x+1)e^x < 0$ für $x \in (0, 1)$. Die Funktion ist also streng monoton fallend und es gilt $x \neq x^* \Rightarrow \Phi_3(x) \neq x^*$. Ist $x^{(0)} \neq x^*$ so gilt also $x^{(K)} \neq x^*$ für alle $K \in \mathbb{N}$. Da die Funktion nur einen Fixpunkt besitzt gilt zudem $x^{(K)} \neq x^{(K+1)}$

für alle $K \in \mathbb{N}$.
Es ist $\Phi_3'(x^*) = 1 - x^* e^{x^*} - e^{x^*} = -e^{x^*} < -e^{0.5} < -1.6$. Da die Folge stetig differenzierbar ist existiert ein $\delta > 0$ so dass $\Phi_3'(x) < -1.5$ für alle $x \in \mathcal{O} := \{x \in \mathbb{R} : \|x - x^*\| < \delta\}$. Es folgt

$$|\Phi_3(x) - \Phi_3(y)| \geq 1.5|x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathcal{O}.$$

Falls die Folge konvergieren würde, müsste ein $K \in \mathbb{N}$ existieren mit $x(M) \in \mathcal{O}$ für alle $M \geq K$. Nun gilt aber

$$|x^{(M)} - x^{(M+1)}| \geq 1.5^{M-K}|x^{(K)} - x^{(K+1)}| \to \infty,$$

ein Widerspruch.

2. Die Iterationsfunktion lautet

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Es gilt

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Wegen $f(x^*) = 0$ gilt also $\phi'(x^*) = 0$ und wegen Satz I.2 hat die Newtoniteration Konvergenzordnung 2.

3. **a)** Die Fehler nach einem oder zwei Schritten des Verfahrens sind

$$e_{k+1} = e_k^p = 10^{-2p},$$
$$e_{k+2} = e_{k+1}^p = 10^{-2p^2}$$

Ursprünglich war der Fehler in der zweiten Nachkommastelle ($e_k = 10^{-2}$) nach einem Schritt ist der Fehler schon in der $2p$-ten Nachkommastelle und nach zwei Schritten ist er in der $2p^2$-ten Nachkommastelle. Allgemein gilt

$$e_{k+n} = e_k^{2p^n},$$

was man gerne in der Regel zusammenfässt, dass bei einem Verfahren der Ordnung p die Anzahl der gültigen Stellen in jedem Schritt mit p multipliziert wird. Die Hinzunahme der Konstante C ist kompliziert, da sie typischerweise von Schritt zu Schritt leicht variieren kann. $C < 1$ bedeutet, dass die Anzahl gültiger Stellen in einem Schritt sogar um mit als p multipliziert wird, und analog bedeutet $C > 1$, dass der Effekt weniger stark ist. Typischerweise ist C aber in etwa $C \approx 1$ und daher ist die hier beschriebene Rechnung dominierend für das Verfahren.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir rechnen

$$e_k^{p^n} = e_{k+n} = 10^{-15},$$

dann logarithmieren wir und erhalten

$$\log_{10}(e_k^{p^n}) = p^n \log_{10}(e_k) = -2p^n = \log_{10}(10^{-15}) = -15,$$

also $p^n = 7.5$. Erneut logarithmieren wir und erhalten $n \log(p) = \log(7.5)$ oder

$$n = \frac{\log(7.5)}{\log(p)} = \begin{cases} 2.91 & p = 2, \\ 1.83 & p = 3. \end{cases}$$

Das Verfahren zweiter Ordnung braucht also 3 Schritte und das Verfahren 3. Ordnung nur 2 Schritte.

c) Für die Fehlerfortpflanzung rechnen wir nach $e_{k+1} = C\, e_k$ und allgemein

$$e_{k+n} = C^n e_k,$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \log_{10}(C^n e_k) &= \log_{10}(10^{-15}) \\ \Rightarrow -2 + n \log_C &= -15 \\ \Rightarrow n &= \frac{-13}{\log_{10}(0.7)}, \end{aligned}$$

also $n = 83.92$. Das Verfahren erster Ordnung benötigt in diesem Beispiel also 84 Schritte.

4. **a)**

```
function [x,i,fx] = newtoniter(f,df,x,criteria)
tol=eps;
itermax=1000;


if strcmp(criteria,'abs')
    disp('absolutes Abbruchkriterium')
else
    disp('relatives Abbruchkriterium')
end
for i=1:itermax
    xold=x;
    x=x-f(x)/df(x);
    if strcmp(criteria,'abs') && abs(x-xold)<tol
```

Bitte wenden!

```
        break;
    end
    if strcmp(criteria,'rel') && abs((x-xold)/x)<tol
        break;
    end
end
fx=f(x);
end


%script fuer aufgabe4a
xstart=100;
f=@(x) cosh(x)*cos(x)+1;
df=@(x) sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x);
[x,iter,fx]=newtoniter(f,df,xstart,'abs')
```

Nein, es gilt $f(\bar{x}) \approx 10^{27} >> \text{tol}$. Dies liegt daran, dass $f'(\bar{x}) >> 1$.

b)
```
%script fuer Aufgabe 4b
c=10^(-10);
f=@(x) sin(c*x)-.5;
df=@(x) c*cos(c*x);
tol=eps;
xstart=10^10;

[x,iter,fx]=newtoniter(f,df,xstart,'abs')
[x,iter,fx]=newtoniter(f,df,xstart,'rel')
```

Verwendet man die Schätzung für den absoluten Fehler als Toleranz so benötigt man 7 Newtoniterationen, mit der Schätzung für den relativen Fehler als Toleranz benötigt man eine Newtoniterationen weniger.

5. **a)** Wir setzen $x_2 = \sin(x_1)$ in der ersten Gleichung ein und erhalten $x_1 = \cos(\sin(x_1))$, x_1 ist also eine Nullstelle von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x - \cos(\sin(x))$. Es gilt

$$f'(x) = 1 + \sin(\sin(x))\cos(x) \begin{cases} = 1 > 0 & \text{falls } |\cos(x)| = 1 \\ \geq 1 - 1 \cdot |\cos(x)| > 0 & \text{falls } |\cos(x)| < 1. \end{cases}$$

Die Funktion ist also streng monoton steigend und besitzt daher höchstens eine Nullstelle, da $f(0) = -1 < 0$ und $f(\pi) = \pi - 1 > 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle. Da die Gleichung $f(x_1) = 0$ nun für x_1 genau eine Lösung hat, gibt es für x_2 wegen $x_2 = \sin(x_1)$ auch nur eine Lösung. Insbesondere hat F also genau eine Nullstelle.

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Jacobimatrix lautet

$$J((x_1,\ x_2)^T) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_1}{dx_2} \\ \frac{dF_2}{dx_1} & \frac{dF_2}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin(x_2) \\ -cos(x_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Iterationsvorschrift lautet also

$$\mathbf{x}^{(K+1)} = \mathbf{x}^{(K)} - \begin{pmatrix} 1 & \sin(x_2) \\ -cos(x_1) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \cos(x_2) \\ x_2 - \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

c)
```
function [x_new] = newtonstep(x_old)
%Input: x_old 2x1 Vektor
%Output: x_new 2x1 Vektor

%Funktion F:R^2 -> R^2
F=@(x) [x(1)-cos(x(2)); x(2)-sin(x(1))];

%Jacobi-Matrix J:R^2 -> R^(2x2)
J=@(x) [1 sin(x(2));-cos(x(1)) 1];

%Iterationsschritt
x_new=x_old-J(x_old)\F(x_old);

end
```

d)
```
%Skript zur Bestimmung der Nullstelle mittels Newtonverfahren
%Startwert
x_old=[1;1];
%Iterationsschleife
for i=1:1000 %maximal 1000 Iterationen
    %x_old und x_new bezeichnen zwei
    %aufeinanderfolgende Werte der Iteration

    %naechstes Element der Folge berechnen
    x_new=newtonstep(x_old);
    %Iteration abbrechen falls die Aenderung
    %in der 2-Norm um weniger als 10^-10 aendert
        if norm(x_new-x_old)<10^(-10)
            break
        end
        %x_old updaten
        x_old=x_new;
end
```

Bitte wenden!

```
%Mehr Dezimalstellen anzeigen
format long
%Resultat ausgeben
x_new
```

Das Ergebnis lautet:

```
0.76816916
0.69481969
```

6. **a)** Wir erhalten die Gleichung für die dimensionslosen Grössen indem wir einfach R_i durch r_i und RG_i durch g_i ersetzen:

$$g_3 = r_3 + \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

und durch umformen

$$r_3 = g_3 - \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Die rechte Seite entspricht genau dem dritten Eintrag von $\Phi(\mathbf{r})$. Aus Symmetriegruenden gilt das Entsprechende für den zweiten und ersten Eintrag. Die Fixpunktgleichung für Φ ist also äquivalent zu den den erhaltenden Gleichungen.

b) Die erste Zeile der Jacobimatrix an der Stelle $\mathbf{r}$ ergibt

$$J(1,:) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_3^2}{(x_2+x_3)^2} & \frac{x_2^2}{(x_2+x_3)^2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\|J(1,:)\|_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3} < 1.$$

Aus Symmetriegründen sind die 1-Normen der zweiten und dritten Zeile ebenfalls kleiner als 1. Die ∞-Norm der Jacobimatrix berechnet sich gemäss Vorlesung wie folgt

$$\|J\|_\infty = \underset{i\in\{1,2,3\}}{max} \|J(i,:)\|_1 < 1.$$

c) Gemäss Bemerkung ii) von Satz I.2 folgt mit b) die Behauptung.

d) Offensichtlich gilt $r_1 < g_1,\ r_2 < g_2$ und $r_3 < g_3$. Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir aus den ursprünglichen Gleichungen

$$C := r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = g_1(r_2 + r_3) = g_2(r_1 + r_3) = g_3(r_1 + r_3).$$

Für $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in A_\varepsilon$ gilt $(\Phi(\mathbf{x}))_1 = g_1 - \frac{1}{\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}} < g_1$ und

$$(\Phi(\mathbf{x}))_1 = g_1 - \frac{1}{\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} \geq g_1 - \frac{1}{\frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}} = C\left(\frac{1}{r_2 + r_3} - \frac{1}{r_2 + r_3 + 2r_1}\right) > 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Analog gilt $0 < (\Phi(\mathbf{x}))_2 < g_2$ und $0 < (\Phi(\mathbf{x}))_3 < g_3$. Für ε genügend klein ist Φ also eine Selbstabbildung auf A_ε.

e) Wir nehmen an, dass sich die Widerstände nicht eindeutig bestimmen lassen. Dann gibt es einen weiteren Fixpunkt $\mathbf{s} \in (0, \infty)^3$ von Φ mit $0 < s_i < g_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Für ε genügend klein ist dann $\mathbf{s} \in A_\varepsilon$. Da A_ε kompakt und $x \mapsto \|\Phi'(x)\|_\infty$ stetig ist gibt es ein $z \in A_\varepsilon$ mit

$$\sup_{x \in A_\varepsilon} \|\Phi'(x)\|_\infty = \|\Phi'(z)\|_\infty < 1$$

(Die letzte Ungleichung folgt aus Teilaufgabe b). Aus der Vorlesung folgt nun, dass Φ eine Kontraktion auf A_ε ist und aus dem Banachschen Fixpunktsatz, dass es nur einen Fixpunkt gibt was im Widerspruch zur Annahme steht.