Prof. Dr. A. Jentzen
M. Sprecher

Serie 3

1. **a)**
```
function [ x] = bisect(G,a,b,tol)
%bisect finds root of G(x) in the interval [a,b] with tolerance tol
Ga=G(a);
if Ga<0
    v=-1;
else
    v=1;
end
x=(a+b)/2;
tol2=2*tol;
while ((b-a>tol2) && ((a<x) && (x<b)))
    if (v*G(x)<=0)
        b=x;
    else
        a=x;
    end
    x=.5*(a+b);

end
```

b) Gemäss der a priori Fehlerabschätzung auf Seite 9 gilt

$$| x^* - y^{(l)} | \leq 2^{-(l+1)}.$$

Es genügen also

$$k = \frac{10\log(10)}{\log(2)} - 1 = 32.2193 \leq 33$$

Schritte.

2. **a)**
```
function [L,U] = myLU(A)

% function [L,U] = myLU(A);
%
```

Bitte wenden!

```
% Purpose: LU-Zerlegung einer m x n Matrix A mit trivialer
%          Auswahl der Pivotelemente, d.h. Diagonalstrategie
%
% Input:  A ... Matrix
%
% Output: L ... untere (lower) Dreiecks-Matrix
%         U ... obere  (upper) Dreiecks-Matrix
%

  % Groesse von A
  [m,n] = size(A);

  % Speicherplatz fuer L
  L = zeros(m,m);

  % Initialisiere A auf U
  U = A;

  % LU-Zerlegung
  for i=1:m
    L(i,i) = 1.; % Einheitsdiagonale
    if ( i > n )
      break;
    end
    % Ueberpruefe, dass das Pivotelement absolut groesser eps ist!
    if ( abs(U(i,i)) <= eps )
      error('Pivotelement wurde 0!!!');
    end

   for j=i+1:m
      L(j,i) = U(j,i)/U(i,i);
      for k=j:n
        U(j,k) = U(j,k) - L(j,i)*U(i,k);
      end
   end

  end
```

b)

```
function [det] = mydet(A)


% Purpose: Determinante einer n x n Matrix A
%
```

Siehe nächstes Blatt!

```
% Input:  A ... Matrix
%
% Output: Determinant of A


[~,U]=myLU(A);
det=prod(diag(U));

end
```

c)

```
function x = myLUsolve(L,U,b)

% function x = lmyLUsolve(L,U,b)
%
% Purpose: loese lineares Gleichungs-System A x = b gegeben mit
%          LU-Zerlegung der n x n (quadratischen!) Matrix A und
%          trivialer Permutations-Matrix P = E
%
% Input:  L ... untere (lower) Dreiecks-Matrix
%         U ... obere  (upper) Dreiecks-Matrix
%         b ... rechte Seite
%
% Output: x ... Loesung
%

% L & U muessen quadratische Matrizen sein!
  [mL,nL] = size(L);
  if ( mL ~= nL )
    error('L Matrix nicht quadratisch!!!');
  end
  [mU,nU] = size(L);
  if ( mL ~= nL )
    error('U Matrix nicht quadratisch!!!');
  end
  if ( nL ~= mU )
    error('L & U haben nicht gleiche Groesse!!!');
  end
  n = nL; % da nL = mL = nU = mU!

% Vorwaerts einsetzen  L y = b --> y
  y = zeros(n,1); % Speicher fuer y
  y(1) = b(1);
```

Bitte wenden!

```
  for i=2:n
    y(i) = b(i) - L(i,1:i-1)*y(1:i-1);
  end

% Rueckwerts einsetzen U x = y --> x
  x = zeros(n,1); % Speicher fuer x
  x(n) = y(n)/U(n,n);
  for i=n-1:-1:1
    x(i) = (y(i) - U(i,i+1:n)*x(i+1:n))/U(i,i);
  end
```

d)
```
n=60;
A = [tril(-ones(n,n-1)) + 2*[eye(n-1); zeros(1,n-1)],ones(n,1)];
x = ((-1).^(1:n))';
b=A*x;
[L,U]=myLU(A);
x_tilde=myLUsolve(L,U,b);
err=norm(x_tilde-x)
```

Der Fehler ist 2.4495, also sehr gross. Der Löser mit LU-Zerlegung versagt in diesem Beispiel, da die Kondition von U (ca. 10^{23}) zu gross ist. Kleine Rundungsfehler in b führen daher zu erheblichen Fehler in der Approximation der Lösung $\tilde{x}$.

e)
```
n=1000;
A=rand(n);
b=rand(n,1);

disp('Mit LU');
tic
[L,U]=lu(A);
y=L\b;
x_lu=U\y;
toc

disp('Mit inv')
tic
Ainv=inv(A);
x_inv=Ainv*b;
toc

disp('Mit backslash')
tic
```

Siehe nächstes Blatt!

```
x_back=A\b;
toc
```

Die Rechenzeit mithilfe der LU-Zerlegung und mithilfe des Backslashoperators ist ungefähr gleich. Dies ist nicht so erstaunlich da der Backslashoperator ebenfalls die LU-zerlegung verwendet (mit Pivotisierung). Die Berechnung mithilfe der Inversen dauert circa doppelt so lang.

f)

```
function [L,U,P] = myLUsolve_pivot(A)

% function [L,U,P] = myLUsolve_pivot(A);
%
% Purpose: LU-Zerlegung einer m x n Matrix A mit Auswahl der
%          Pivotelemente nach Kolonnenmaximums-Strategie
%
% Input:  A ... Matrix
%
% Output: L ... untere (lower) Dreiecks-Matrix
%         U ... obere  (upper) Dreiecks-Matrix
%         P ... Permutations-Matrix
%

  % Groesse von A
  [m,n] = size(A);

  % Speicherplatz fuer L, U und Pivotvektor p
  L = zeros(m,m);
  U = zeros(m,n);
  p = 1:n;

  % Kopiere A auf U
  U = A;

  % LU-Zerlegung
  for i=1:m
    if ( i > n )
      break;
    end
    % Finde Maximales Pivotelement
    [dummy,p(i)] = max(abs(U(i:m,i)));
    p(i) = p(i) + i - 1;
    % Permutiere L & U (falls noetig!)
    if ( p(i) ~= i )
      tmp = U(i,:); % Zwischenspeichern!
```

Bitte wenden!

```
      U(i,:) = U(p(i),:);
      U(p(i),:) = tmp;
      tmp = L(i,:); % Zwischenspeichern!
      L(i,:) = L(p(i),:);
      L(p(i),:) = tmp;
    end
    L(i,i) = 1.; % Einheitsdiagonale
    % Ueberpruefe, dass das Pivotelement absolut groesser eps ist!
    if ( abs(U(i,i)) <= eps )
      error('Pivotelement wurde 0!!!');
    end
    for j=i+1:m
      L(j,i) = U(j,i)/U(i,i);
      for k=i:n
        U(j,k) = U(j,k) - L(j,i)*U(i,k);
      end
    end
  end

% Bilde Permutations Matrix
  P = eye(m);
  for i=1:m
    if ( p(i) ~= i )
      tmp = P(i,:);
      P(i,:) = P(p(i),:);
      P(p(i),:) = tmp;
    end
  end
```

3. **a)** Es gilt

$$H(v)^H = I^H - \frac{2}{\|v\|_2^2}(vv^H)^H = I - \frac{2}{\|v\|_2^2}(v^H)^H v^H = H(v)$$

und wegen $\|v\|_2^2 = v^H v$

$$\begin{aligned} H(v)H(v)^H &= H(v)H(v) \\ &= I^2 - \frac{2}{\|v\|_2^2}vv^H I - \frac{2}{\|v\|_2^2}Ivv^H + \frac{4}{\|v\|_2^4}vv^H vv^H \\ &= I - \frac{4}{\|v\|_2^2}vv^H + \frac{4}{\|v\|_2^4}v(v^H v)v^H \\ &= I. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Für w senkrecht zu v, dass heisst $\langle v, w\rangle = 0$, gilt $H(v)w = w$ also ist

$$v^\perp := \{w \in \mathbb{C}^m : \langle v, w\rangle = 0\}.$$

ein Unterraum des Eigenraums zum Eigenwert 1. Es gilt $H(v)v = v - 2v = -v$ und es folgt, dass $\mathbb{C}v := \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}$ ein Unterraum des Eigenraums zum Eigenwert -1 ist. Da $v^\perp$ und $\mathbb{C}v$ den Raum $\mathbb{C}^m$ aufspannen gilt, dass $v^\perp$ und $\mathbb{C}v$ die Eigenräume zu den Eigenwerten 1 bzw. -1 sind und es keine weiteren Eigenwerte bzw. Eigenvektoren gibt.

c) Mit Householder-Reflexionen:

Sei a die erste Spalte von A. Wir haben

$$\begin{aligned} H(a - \|a\|_2 e_1) &= H(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}) \\ &= I - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es folgt

$$H(v_1)A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die zweite Householder-Spiegelung $H(v_2)$ betrachten wir die rechte untere 2×2 matrix. Es folgt

$$\begin{aligned} H(a - \|a\|_2 e_1) &= H(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}) \\ &= H(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$H(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } H(v_2)H(v_1)A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Da dies nun eine Rechtsdreiecksmatrix ist können wir

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } Q = H(v_1)^T H(v_2)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

setzen.

Mit Givens-Rotationen:

Mit den Notationen aus dem Skript auf Seite 78 gilt $\gamma = \sigma = 1/\sqrt{2}$ und die Rotationsmatrix lautet:

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die transformierte Matrix lautet nun:

$$G_{1,2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Schritt erhalten wir

$$G_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ sowie } G_{1,3}G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da dies nun eine Rechtsdreiecksmatrix sind wir fertig und wir können

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } Q = G_{1,2}^T G_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

setzen.

4. **a)** Es gilt

$$T(\mu)T(\mu)^T = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1+\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynome ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\mu^2 + 2)\lambda + 1$$

Siehe nächstes Blatt!

und die Eigenwerte sind

$$\lambda_{max,min} = \frac{(\mu^2+2) \pm \sqrt{\mu^4+4\mu^2}}{2}. \tag{1}$$

Da

$$T(\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} \text{ und } T(\mu)^{-1}T(\mu)^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & \mu^2+1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die charakteristischen Polynome und deshalb auch die Eigenwerte der Matrizen $T(\mu)T(\mu)^T$ und $T(\mu)^{-1}T(\mu)^{-T}$ gleich sind. Es gilt also

$$\text{cond}_2 = \|T(\mu)\|_2 \|T(\mu)^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}^2 = \lambda_{max}.$$

wobei λ_{max} der grösste Eigenwert von $T(\mu)T(\mu)^T$ sei. Da

$$\mu^2 \leq \sqrt{\mu^4+4\mu^2} \leq \mu^2+2$$

folgt nun aus Gleichung (1), dass

$$\mu^2+1 \leq \lambda_{max} \leq \mu^2+2$$

gilt.

b) Die Matrix $S(\varepsilon)$ ist symmetrisch und es folgt, dass $SS^T = S^2$. Die die Eigenwerte von S^2 die quadrierten Eigenwerte von S und die Eigenwerte von S^{-1} die Kehrwerte der Eigenwerte von S sind gilt

$$\text{cond}_2(S(\varepsilon)) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|},$$

wobei λ_{max} und λ_{min} der betragsmässig grösste bzw. der betragsmässig kleinste Eigenwert von $S(\varepsilon)$ sei. Es ist

$$\text{cond}_2(S(\varepsilon)) = \frac{\sqrt{4+\varepsilon^2}+\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}-\varepsilon} = \frac{(\sqrt{4+\varepsilon^2}+\varepsilon)^2}{4} \begin{cases} \geq 1 \\ \leq (\varepsilon+1)^2 \end{cases}.$$

c) Es ist

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

und es folgt, dass $cond_2(L) \approx \varepsilon^{-2}$ sehr gross und L deshalb schlecht konditioniert ist. Die Kondition von $S(\varepsilon)$ ist ungefär 1, woraus folgt, dass $S(\varepsilon)$ gut konditioniert ist. Löst man das Gleichungssystem mit LR-Zerlegung so verstärken sich die Rundungsfehler massiv und es ist deshalb von dieser Lösungsmethode abzuraten.

Bitte wenden!

d) Da $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle unitären Matrizen Q und $x \in \mathbb{C}^n$ gilt, ist

$$\text{cond}_2(Q) = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = 1$$

sowie

$$\text{cond}_2(R) = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Rx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|QRx\|_2}{\|x\|_2} = \text{cond}_2(A).$$

Hier sind die Matrizen besser konditioniert als bei c). Die Verstärkung der Rundungsfehler ist also nur so gross wie von der Matrix $S(\varepsilon)$ vorgegeben.