Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Musterloesung 7

1. **a)** Es folgt der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
v_1 &= x && (1)\\
w &= (1,2,4,2) && (2)\\
h_{11} &= 4 && (3)\\
w &= (1,2,0,2) && (4)\\
h_{21} &= 3 && (5)\\
v_2 &= 1/3(1,2,0,2) && (6)\\
w &= 1/3(-1,-2,-6,-2) && (7)\\
h_{12} &= -2 && (8)\\
w &= 1/3(-1,-2,0,-2) && (9)\\
h_{22} &= -1 && (10)\\
w &= 0 && (11)\\
h_{32} &= 0. && (12)
\end{aligned}
$$

Der Algorithmus bricht nun ab. Wir erhalten die Matrix

$$H_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwerte von H_2 sind 1 und 2 mit dazugehörigen Eigenvektoren $(2,3)$ und $(1,1)$. Es folgt, dass 1 und 2 ebenfalls Eigenwerte von A sind mit dazugehörigen Eigenvektoren $2(0,0,1,0) + 3 \cdot 1/3(1,2,0,2) = (1,2,2,2)$ und $(0,0,1,0) + 1/3(1,2,0,2) = 1/3(1,2,3,2)$.

c) Sei $V := \text{span}(v_1, v_2)$. Da $Av_1, Av_2 \in V$ gilt $Av \in V$ für alle $v \in V$. Folglich gilt auch $A^k v \in V$ für alle $v \in V$ und $k \in \mathbb{N}$. Der 4-te Krylow-Raum zu A und x ist also folglich gleich V.

Bitte wenden!

2. **a)** Wir erhalten

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= \frac{t(t-1)(t-2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} &&= \frac{-t^3+3t^2-2t}{6}\\
L_2(t) &= \frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} &&= \frac{t^3-2t^2-t+2}{2}\\
L_3(t) &= \frac{(t+1)t(t-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)} &&= \frac{-t^3+t^2+2t}{2}\\
L_4(t) &= \frac{(t+1)t(t-1)}{3\cdot 2\cdot 1} &&= \frac{t^3-t}{6}
\end{aligned}$$

und deshalb

$$p(x) = -4L_1(x) - 1L_2(x) + 5L_4(x) = -1 + x - x^2 + x^3.$$

Es ist also $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, -1, 1)$.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\\ -1\\ 0\\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten durch Vorwärtssubstituieren der Reihe nach $b_1 = -4,\ b_2 = 3,\ b_3 = -1,\ b_4 = 1$ und deshalb

$$p(x) = -4N_0 + 3N_1 - N_2 + N_3 = -1 + x - x^2 + x^3.$$

Es ist also $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, -1, 1)$.

c) Wir erhalten der Reihe nach $y[t_0] = -4,\ y[t_1] = -1,\ y[t_2] = -0,\ y[t_3] = 5,\ y[t_0, t_1] = 3,\ y[t_1, t_2] = 1,\ y[t_2, t_3] = 5,\ y[t_0, t_1, t_2] = -1,\ y[t_1, t_2, t_3] = 2,\ y[t_0, t_1, t_2, t_3] = 1$ und deshalb

$$p(x) = -4N_0 + 3N_1 - N_2 + N_3 = -1 + x - x^2 + x^3.$$

Es ist also $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, -1, 1)$.

3. **a)**

```
function [c] = my_interpol(x,y)

%This Function computes the Newton-Interpolation for
%Nodes (x_0,...,x_m) and values (y_0,...,y_m)
%x and y must be vectors of the same size
```

Siehe nächstes Blatt!

```
m=max(size(y));

%Initialisation
c=y;

for k=1:m-1
    for i=m:-1:k+1
       c(i)=(c(i)-c(i-1))/(x(i)-x(i-k));
    end
end


end
```

b)
```
function [p] = my_poly_eval(c,x,t)

%MY_POLY_EVAL evaluates the polynomial at the points (t_0,...,t_m)
%given the coefficients c=(co,...,c_n) of the newton
%interpolation and the nodes (x_0,...,x_n)

m=max(size(c));
p=c(m)*ones(size(t));
for k=m-1:-1:1
    p=c(k)+(t-x(k)).*p;
end


end
```

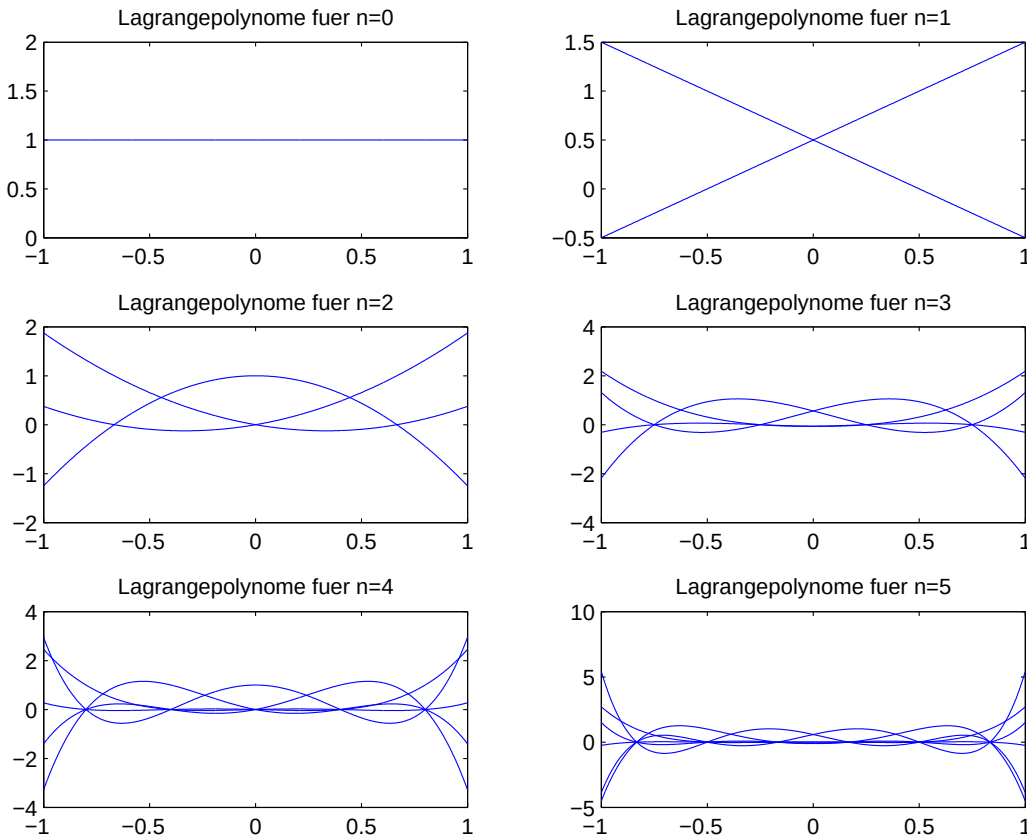
c)
```
%lagrange.m

%Punkte an der Interpolationspolynom ausgewertet wird
nmesh=1000;
t=linspace(-1,1,nmesh);

for n=0:5
    x=linspace(-1+1/(n+1),1-1/(n+1),n+1);
    subplot(3,2,n+1);
    for m=1:n+1
        y=zeros(1,n+1);
```

Bitte wenden!

```
        y(m)=1;
        c=my_interpol(x,y);
        p=my_poly_eval(c,x,t);
        plot(t,p)
        hold on;
    end
    title(['Lagrangepolynome fuer n=' num2str(n)])
end
print('-dpdf','lagr')
```



d) `%lebesgue.m`

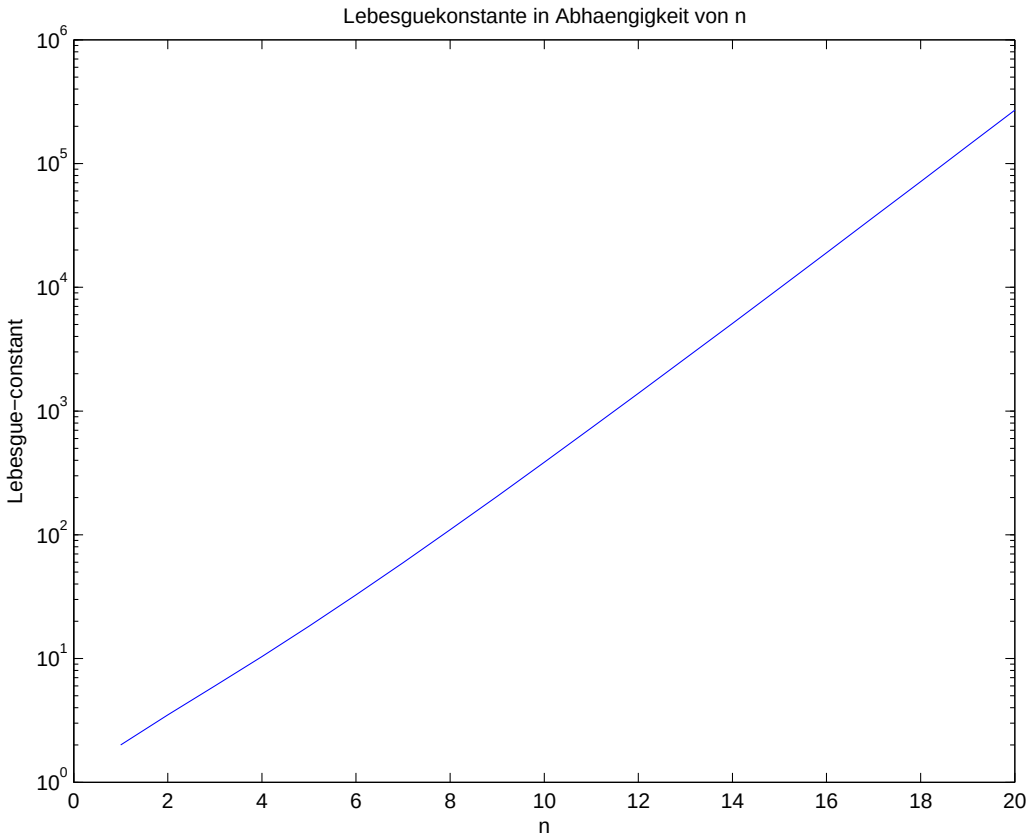
```
%Punkte an der Interpolationspolynom ausgewertet wird
nmesh=10000;
t=linspace(-1,1,nmesh);

%Approximation fuer Lebesgue-konstante
nleb=20;
leb=zeros(1,nleb);
```

Siehe nächstes Blatt!

```
for n=1:20
    x=linspace(-1+1/(n+1),1-1/(n+1),n+1);
    %summe der absoluten werte der lagrangepolynome
    ls=zeros(1,nmesh);
    for m=1:n+1
        y=zeros(1,n+1);
        y(m)=1;
        c=my_interpol(x,y);
        p=my_poly_eval(c,x,t);
        ls=ls+abs(p);
    end
    leb(n)=max(ls);
end
semilogy(leb)
title('Lebesguekonstante in Abhaengigkeit von n')
xlabel('n')
ylabel('Lebesgue-constant')
print('-dpdf','leb.pdf')
```

Die Lebesgue-konstante wächst exponentiel in n.


Lebesguekonstante in Abhaengigkeit von n
Lebesgue−constant
n
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20