Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Musterlösung Prüfung Sommer 2014

1. **a)** **(3 Punkte)** Es gilt

$$\Phi_1(x) = x \Leftrightarrow x + 2 - x^3 = x \Leftrightarrow 2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

und

$$\Phi_2(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x + x^{-2}\right) = x \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3}x = 0 \Leftrightarrow 2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

b) **(5 Punkte)** Die einzige Nullstelle von f ist $x^* = \sqrt[3]{2}$. Die Ableitung von Φ_1 bei x^* beträgt

$$\Phi_1'(x^*) = 1 - 3(x^*)^2.$$

Da $x^* > 1$ ist auch $(x^*)^2 > 1$ und deshalb

$$\Phi_1'(x^*) = 1 - 3(x^*)^2 < 1 - 3 = -2 < -1.$$

Es gilt also $|\Phi_1'(x^*)| > 1$ und das Fixpunktverfahren konvergiert daher nicht. Die Ableitung von Φ_2 bei x^* beträgt

$$\Phi_2'(x^*) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x^{-3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.$$

Das Fixpunktverfahren konvergiert wegen Satz I.2 aus der Vorlesung quadratisch und daher auch linear.

c) **(7 Punkte)**

```
function x = fixIt(phi, x0, tol, maxit)
    x=x0;
    for i=1:maxit
        xnew=phi(x);
        if abs(xnew-x)<tol
            break;
        end
        x=xnew;
    end
    x=xnew
end
```

Bitte wenden!

2. **a)** **(4 Punkte)** Man erhält die LU-Zerlegung mit Gauss:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) **(2 Punkte)** Die Matrix L ist immer regulär und U ist regulär da die Diagonaleinträge ungleich 0 sind. Also ist A als Produkt zweier regulärer Matrizen auch regulär.

c) **(3 Punkte)** Wir lösen zuerst $Ly = b$ und erhalten durch Vorwärtssubstitution $y = (1\ 1\ 5)^T$. Durch Rückwärtssubstitution der Gleichung $Ux = y$ erhalten wir anschliessend $x = (3\ \ -1\ 1)^T$.

d) **(4 Punkte)**
Wir nehmen an es gäbe zwei Zerlegungen $A = LU = L'U'$. Da A regulär ist, sind L, L', U, U' ebenfalls regulär und es folgt durch Multiplikation von links mit $(L')^{-1}$ und von rechts mit U^{-1}, dass

$$(L')^{-1}L = U'U^{-1}.$$

Nun verwenden wir, dass das Produkt zweier Linksdreiecksmatrixen (bzw. Rechtsdreiecksmatrizen) sowie die Inverse einer Linksdreiecksmatrix (bzw. Rechtsdreiecksmatriz) selbst wieder eine einer Linksdreiecksmatrix (bzw. Rechtsdreiecksmatriz) ist (Beweis siehe weiter unten). Auch die 1er auf der Diagonalen bleiben erhalten. Somit folgt, dass die linke Seite eine Linksdreiecksmatrix mit 1er auf der Diagonalen und die rechte Seite eine Rechtsdreiecksmatrix ist. Die einzige Matrix die beides erfüllt ist die Einheitsmatrix. Somit gilt

$$(L')^{-1}L = U'U^{-1} = I,$$

und folglich $L' = L$ und $U' = U$, was beweist, dass die beiden Zerlegungen identisch sein müssen. Die LU-Zerlegung einer regulären Matrix ist also eindeutig. Um zu zeigen, dass die Inverse einer Linksdreiecksmatrix mit 1er auf der Diagonalen wieder eine Linksdreiecksmatrix mit einer auf der Diagonalen ist gehen wir induktiv vor. Die Aussage ist sicher korrekt für 1×1 Matrizen. Wir nehmen nun an die Aussage gilt für $n \times n$ Matrizen und betrachten eine allgemeine Linksdreiecksmatrix L_{n+1} der Grösse $(n+1) \times (n+1)$ die wir wie folgt aufspalten

$$L_{n+1} = \begin{pmatrix} L_n & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$(L_{n+1})^{-1} = \begin{pmatrix} (L_n)^{-1} & 0 \\ -x(L_n)^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Inverse ist also wieder eine Linksdreiecksmatrix mit 1er auf der Diagonalen. Analog geht der Beweis für Rechtsdreiecksmatrizen. Die Aussage für das Produkt lässt sich ebenfalls mit Induktion zeigen.

3. a) (2 Punkte)

$$J = \begin{pmatrix} x_2 + t_1 & x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 & x_1 + t_2 \\ x_2 + t_3 & x_1 + t_3 \\ x_2 + t_4 & x_1 + t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_2 + 1 & x_1 + 1 \\ x_2 + 2 & x_1 + 2 \\ x_2 + 3 & x_1 + 3 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte)
Es gilt

$$F(x) \approx F(x_0) + J(x_0)(x - x_0).$$

Das Gaussnewtonverfahren wählt x so, dass die rechte Seite minimiert wird. Die Matrix A und die rechte Seite b des Ausgleichsproblem lauten also

$$A = J(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = -F(x_0) = -\begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-6 \\ 12-10 \\ 20-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) (2 Punkte)
Die Normalengleichung $A^T A x = A^T b$ wird zu

$$\begin{pmatrix} 54 & 40 \\ 40 & 30 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $(0, -0.2)$.

d) (1 Punkte)
Sei (y_1, y_2) die Lösung aus c) dann gilt

$$(x_1^*, x_2^*) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (1, 2) + (0, -0.2) = (1, 1.8).$$

4. a) (5 Punkte)
1. Lösung

Bitte wenden!

Die Quadraturformel besitzt genau dann Exaktheitsgrad 2 wenn sie exakt ist für die Monome $1, x$ und x^2. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= \int_{-1}^{1} 1dx = 2, && (1)\\ -{}^1\!/_2 w_0 + w_2 &= \int_{-1}^{1} xdx = 0 \text{ und} && (2)\\ {}^1\!/_4 w_0 + w_2 &= \int_{-1}^{1} x^2dx = {}^2\!/_3 && (3) \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der dritten ergibt

$$^3\!/_4 w_0 = {}^2\!/_3$$

und daher $w_0 = {}^8\!/_9$. Aus der zweiten Gleichung folgt nun $w_2 = {}^4\!/_9$ und aus der ersten $w_1 = 2 - w_0 - w_2 = {}^2\!/_3$.

2. Lösung

Die Lagrangepolynome zu den Stützpunkten lauten

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x(x-1)}{(-{}^1\!/_2)\cdot {}^3\!/_2} = \frac{4x(x-1)}{3} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x, && (4)\\ l_2(x) &= \frac{x(x+{}^1\!/_2)}{1\cdot {}^3\!/_2} = \frac{2x(x+{}^1\!/_2)}{3} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \text{ und} && (5)\\ l_1(x) &= 1 - l_0(x) - l_2(x) = -2x^2 + x + 1. && (6) \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_{-1}^{1} l_0(x)dx = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{8}{9}, && (7)\\ w_1 &= \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = -2\int_{-1}^{1} x^2dx + \int_{-1}^{1} 1dx = {}^2\!/_3 \text{ und} && (8)\\ w_2 &= \int_{-1}^{1} l_2(x)dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{4}{9}. && (9) \end{aligned}$$

b) **(3 Punkte)** Durch Reparametrisierung erhalten wir die neuen Stuetzpunkten $(\tilde{x_0}, \tilde{x_1}, \tilde{x_0}) = {}^1\!/_2((1,1,1) + (x_0, x_1, x_2)) = ({}^1\!/_4, {}^1\!/_2, 1)$ und die neuen Gewichte $(\tilde{w_0}, \tilde{w_1}, \tilde{w_0}) = {}^1\!/_2(w_0, w_1, w_2) = ({}^4\!/_9, {}^1\!/_3, {}^2\!/_9)$ und die Approximation

$$\int_0^1 \log_2(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} \tilde{w_i}\log_2(\tilde{x_i}) = {}^4\!/_9(-2) + {}^1\!/_3(-1) + {}^2\!/_9 0 = -{}^{11}\!/_9$$

Siehe nächstes Blatt!

5. (3 Punkte)

```
function [w,z]=potenzmethode(A,z0)
%Bestimmung des betragsmaessig groessten Eigenwerts w
%und dazugehoerigen Eigenvektor z einer Matrix A
%mittels Potenzmethode.

%Maximale Anzahl Iteration
itermax=10000;

%Toleranz
tol=10^(-10);

%Initialisierung von zold
zold=z0;

for i=1:itermax
    z=A*zold;
    w=zold'*z;
    z=z/norm(z);
    if norm(A*z-w*z)<tol
        break;
    end
    zold=z;
end
end
```

6. a) (3 Punkte) Wir erhalten

$$y'(x_j) \approx c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 \tag{10}$$

$$y(x_j)^2 \approx (y_j + c_1h + c_2h^2)^2 \approx y_j^2 + 2y_jc_1h + (2y_jc_2 + c_1^2)h^2 \tag{11}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$c_1 = y_j^2 \tag{12}$$

$$c_2 = y_jc_1 \tag{13}$$

$$c_3 = \frac{2y_jc_2 + c_1^2}{3} \tag{14}$$

b) (2 Punkte) Wir erhalten $y_0 = y(1) = 1/2$, $c_1 = 1/4$, $c_2 = 1/8$ and $c_3 = 1/16$ und daher

$$y_1 = y_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 15/16.$$

Bitte wenden!

c) (3 Punkte) Durch Separation der Variabeln

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^2 && (15) \\ y^{-2}dy &= dx && (16) \\ C - y^{-1} &= x && (17) \\ y &= \frac{1}{C-x} && (18) \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 1/2$ folgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{C-1}$$

und somit $C = 3$. Wir erhalten also die Lösung

$$y = \frac{1}{3-x}.$$

d) (2 Punkte)

$$\delta_1 = y(2) - y_1 = 1 - 15/16 = 1/16.$$

e) (5 Punkte) Nach Konstruktion des Taylorreihenverfahrens gilt

$$\delta_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} = y^{(4)}(x_j)\frac{1}{4!}h^4 + \mathcal{O}(h^5).$$

Da für die Differentialgleichung in dieser Aufgabe

$$y^{(4)}(x_j)\frac{1}{4!} = (3 - x_j)^{-5} \neq 0$$

gilt, hat das Verfahren Konsistenzordnung p für alle $p \leq 3$.