Name:

D-ITET, D-MATL

Prüfung Numerische Methoden, Sommer 2014

Dr. Roger Käppeli

- Maximale Punktzahl: $62 = 15 + 13 + 8 + 8 + 3 + 15$ Punkte.

Viel Erfolg!

---

1. (15 Punkte) Wir betrachten das reelle Nullstellenproblem $f(x) = x^3 - 2 = 0$ und die Fixpunktgleichungen $x = \Phi_i(x), i = 1, 2$ mit

$$\Phi_1(x) = x + 2 - x^3,\ \Phi_2(x) = \frac{2}{3}(x + x^{-2}).$$

a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktprobleme $x = \Phi_1(x)$ und $x = \Phi_2(x)$ konsistent sind mit dem Nullstellenproblem $f(x) = 0$.

b) Untersuchen Sie für beide Fixpunktgleichungen ob das entsprechende Fixpunktverfahren lokal gegen eine Nullstelle konvergiert. Falls ja, untersuchen Sie ob die Konvergenz linear und ob die Konvergenz quadratisch ist.

c) Schreiben Sie eine Matlabfunktion welche mit Fixpunktiterationen eine Approximation des Fixpunktes einer Funktion `phi` berechnet. Der Startwert sei `x0` und die Iteration soll solange ausgeführt werden bis der Betrag der Differenz von einem Iterat zum nächsten kleiner als `tol` ist oder die maximal erlaubte Anzahl Iterationen `maxit` überschritten wird.

```
function x = fixIt(phi, x0, tol, maxit)
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
end
```

2. (13 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie, mit Angabe der Zwischenschritte, eine LU-Zerlegung (ohne Pivotisierung) von A.

b) Ist A regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie mithilfe der LU-Zerlegung aus a) und Angabe der Zwischenschritte die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

d) Zeigen Sie: Besitzt eine reguläre Matrix eine LU-Zerlegung (ohne Pivotisierung) so ist diese eindeutig.

3. (8 Punkte) In einem Labor werden zu verschiedenen Zeitpunkten $(t_i)_{i=1}^4$ die Grössen $(y_i)_{i=1}^4$ gemäss nachfolgendender Tabelle gemessen.

t_i	0	1	2	3
y_i	2	6	10	20

Gemäss einer Theorie kann die Verlaufsfunktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für y angesetzt werden als

$$f(t, x_1, x_2) = (x_1 + t)(x_2 + t) \tag{1}$$

mit den unbekannten Koeffizienten $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten nun die Fehlerfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} f(t_1, x_1, x_2) - y_1 \\ \vdots \\ f(t_4, x_1, x_2) - y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von F.

b) Benützen Sie die Startwerte $(x_1, x_2) = (1, 2)$ und stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem auf, dass für den ersten Schritt des Gauss-Newton-Verfahrens zur Approximation der Koeffizienten x_1^*, x_2^*, welche $\|F(x)\|_2$ minimieren, benötigt wird.

c) Berechnen Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems aus Teilaufgabe b).

d) Wie lautet die neue Approximation für x_1^*, x_2^*? (Falls Sie Teilaufgabe c) nicht gelöst haben können Sie die neue Approximation in Abhängigkeit der Lösung aus Teilaufgabe c) angeben.)

4. (8 Punkte)

a) Sei $x = (x_0, x_1, x_2) = (-1/2, 0, 1)$. Geben Sie, falls möglich, Gewichte $w = (w_0, w_1, w_2)$ an, so dass die Quadraturformel zu den Stützpunkten x und Gewichten w für das Interval $[-1, 1]$ Exaktheitsgrad 2 besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Benützen Sie die Quadraturregel aus a) um den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^1 \log_2(x) dx$$

zu approximieren.

5. (3 Punkte) Ergänzen Sie die folgende Matlabfunktion so, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit betragsweise verschiedenen Eigenwerten und geeignetem Startvektor `z0` $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$ mithilfe der Potenzmethode Approximationen w und z des betragsmässig grössten Eigenwerts und des dazugehörigen Eigenvektors berechnet werden.

Siehe nächstes Blatt!

Name:

```
function [w,z]=potenzmethode(A,z0)
%Bestimmung des betragsmaessig groessten Eigenwerts w
%und dazugehoerigen Eigenvektor z einer Matrix A
%mittels Potenzmethode.

%Maximale Anzahl Iteration
itermax=10000;

%Toleranz
tol=10^(-10);

%Initialisierung von zold
zold=z0;

for i=1:itermax
    % Hier Code einfuegen %
    ____________________________
    ____________________________
    ____________________________
    if norm(A*z-w*z)<tol
        break;
    end
    zold=z;
end
end
```

6. (15 Punkte) Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$y'(x) = y^2, \quad y(1) = 1/2. \tag{2}$$

Sei $h > 0$, $x_j = 1 + jh$ und y_j eine Approximation für $y(x_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wie in der Vorlesung benützen wir den Taylorreihenansatz

$$y(x) \approx y_j + c_1(x - x_j) + c_2(x - x_j)^2 + c_3(x - x_j)^3. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie mit dem Taylorreihenverfahren Gleichungen für c_1, c_2 und c_3.

b) Führen Sie einen Schritt des Taylorreihenverfahrens mit $h = 1$ durch.

c) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems (2) im Interval $[1, 2]$.

d) Bestimmen Sie explizit den lokalen Diskretisationsfehler an der Stelle $x_j = 1$ für $h = 1$?

e) Für welche positiven ganzen Zahlen p hat das Taylorreihenverfahren mit dem Taylorreihenansatz (3) Konsistenzordnung p? Begründen Sie Ihre Antwort.