Musterlösung Winter 2014

1. (9 Punkte)

a) (2 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{(1,-1,2)*(1,2,3)=(1\cdot 1, 1\cdot 2+(-1)\cdot 1, 1\cdot 3+(-1)\cdot 2+2\cdot 1, (-1)\cdot 3+2\cdot 2, 2\cdot 3)}_{\textbf{(0.5 P.)}}$$

$$\underbrace{=(1,1,3,1,6)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \qquad \textbf{(1 P.)}$$

und

$$\underbrace{(1,-1,2)*_3(1,2,3)=(1+1,1+6,3)}_{\textbf{(0.5 P.)}}\underbrace{=(2,7,3)}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

b) (3 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\textbf{(1 P.)}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $a_0 = 1/4$ **(0.5 P.)**, $a_1 = -1/4$ **(0.5 P.)**, $a_2 = 1/4$ **(0.5 P.)**, $a_3 = -1/4$ **(0.5 P.)**.

c) (4 Punkte)

$a = [0,1,2,3];$ **(1 P.)**
$a2 = \mathrm{fft}(a);$ **(0.5 P.)**
$b2 = \mathrm{fft}(b);$ **(0.5 P.)**
$c2 = b2./a2;$ **(1 P.)**
$\mathrm{ifft}(c2)$ **(1 P.)**

Beispiel für alternative Lösung:

$$\mathrm{ifft}(\mathrm{fft}(b)./\,\mathrm{fft}([0,1,2,3]))$$

Bitte wenden!

2. (7.5 Punkte)

a) (2 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{x^{(1)} = x^0 - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = \frac{(x^{(0)})^2 + 5}{2x^{(0)} + 1}}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= \frac{6}{3} = 2}_{\textbf{(0.5 P.)}} \qquad \textbf{(1 P.)}$$

und

$$\underbrace{x^{(2)} = x^1 - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} = \frac{(x^{(1)})^2 + 5}{2x^{(1)} + 1}}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= \frac{9}{5}}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

b) (1.5 Punkte)

$$\underbrace{x(i)-}_{\textbf{(0.5 P.)}}\underbrace{(x(i)\hat{}\,2 + x(i) - 5)/}_{\textbf{(0.5 P.)}}\underbrace{(2 * x(i) + 1)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \qquad \textbf{(1.5 P.)}$$

oder

$$\underbrace{(x(i)\hat{}\,2 + 5)/}_{\textbf{(1 P.)}}\underbrace{(2 * x(i) + 1)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \qquad \textbf{(1.5 P.)}$$

c) (4 Punkte)
Wir setzen $y_k := 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (**(1 P.)** für die korrekte Angabe einer Folge mit den gewünschten Eigenschaften; lineare Konvergenz gegen 0 aber keine Konvergenz mit Ordnung 2 gegen 0). Falls eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften angegeben wurde, dann gibt es folgende Punkte für die Begründungen: Es gilt

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0\colon \quad |y^{(k+1)} - 0| = |y^{(k+1)}| = 2^{-(k+1)} = \tfrac{1}{2}2^{-k} = \tfrac{1}{2}|y^{(k)} - 0|. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

Mit $L := \frac{1}{2} \in [0, 1)$ gilt also insbesondere, dass

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0\colon \qquad |y^{(k+1)} - 0| \leq L\,|y^{(k)} - 0|,$$

d.h., nach Definition konvergiert die Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ linear gegen 0. **(0.5 P.)**
Würde die Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit Ordnung 2 gegen 0 konvergieren, so müsste ein $C \in [0, \infty)$ existieren, sodass

$$\underbrace{\forall\, k \in \mathbb{N}_0\colon \qquad 2^{-(k+1)} = |y^{(k+1)} - 0| \leq C|y^{(k)} - 0|^2 = C|2^{-k}|^2 = C2^{-2k}}_{\textbf{(1 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)} \tag{1}$$

Also müsste gelten

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0\colon \qquad 2^{(k-1)} = 2^{(2k-(k+1))} \leq C,$$

Siehe nächstes Blatt!

was wiederum den Widerspruch

$$\infty = \lim_{k\to\infty} 2^{(k-1)} \leq \lim_{k\to\infty} C = C < \infty$$

impliziert ((**0.5 P.**) um aus (1) einen Widerspruch zu folgern).

3. (7 Punkte)

a) (6 Punkte)
Sei $a = (3, 4)$, dann gilt

$$\underbrace{v := a - \|a\|_2 e_1}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= (-2, 4)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \qquad \textbf{(1 P.)}.$$

Also folgt

$$\underbrace{H(v) = I - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}}_{\textbf{(1 P.)}} \underbrace{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}}_{\textbf{(1.5 P.)}} \qquad \textbf{(2.5 P.)}$$

und somit

$$Q := H(v)^T = H(v) = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 P.)}$$

und

$$\underbrace{R = Q^T A = H(v)A}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= \begin{pmatrix} 5 & 11/5 \\ 0 & -2/5 \end{pmatrix}}_{\textbf{(1 P.)}} \qquad \textbf{(1.5 P.)}$$

2. Loesung:Mit Givens-rotation
3. Loesung:Gram-Schmidt
Achtung Lösung ist nur eindeutig bis auf Vorzeichen.

b) (1 Punkte)

$$\underbrace{[Q, R] =}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{\mathrm{qr}(B)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \qquad \textbf{(1 P.)}$$

4. (5 Punkte)

a) (1 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{\tilde{Q}(f|_{[0,2]}) = 2f(1)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot 1 = 2}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

Bitte wenden!

b) (2 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{\hat{Q}(f|_{[2,3]}) = \frac{1}{3}f(2) + \frac{2}{3}f(3)}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{2}{3}\cdot 3^2 = \frac{4}{3} + 6 = \frac{22}{3}}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

und

$$\underbrace{\bar{Q}(f) = \tilde{Q}(f|_{[0,2]}) + \hat{Q}(f|_{[2,3]})}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= 2 + \frac{22}{3} = \frac{28}{3}}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

c) (2 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{y_1 = y_2 = {}^{b-a}\!/_{2}}_{\textbf{(0.5 P.)}}, \qquad \underbrace{x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}, \qquad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}}_{\textbf{(1.5 P.)}}. \qquad \textbf{(2 P.)} \tag{2}$$

Hat man in (2) weniger als **(1.5 P.)** erhalten, so kann man noch **(0.5 P.)** zusaetzlich erhalten, wenn man die Lösung im Fall $a = -1$, $b = 1$ korrekt angegeben hat, d.h., wenn man angegeben hat, dass $Q^{1,1}_{-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},[-1,1]}$ eine Quadraturformel der Ordnung 4 ist.

5. (3 Punkte)
Gemäss Lemma 6.5.2 im Skript gilt

$$\underbrace{T_4(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{4}{2k} t^{4-2k}(t^2-1)^k}_{\textbf{(1.5 P.)}} \underbrace{= t^4 + 6(t^2(t^2-1)) + (t^2-1)^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1}_{\textbf{(1 P.)}}.$$

Also gilt $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 0, -8, 0, 8)$. **(0.5 P.)**

6. (3.5 Punkte)
Gemäss Ungleichung 6.5.13 im Skript gilt

$$\underbrace{\sup_{x\in[-1,1]} |\exp(x) - p(x)| \leq \frac{|\exp'''|_{\infty,[-1,1]}}{3!\cdot 2^2}}_{\textbf{(2 P.)}}. \qquad \textbf{(2 P.)} \tag{3}$$

Bemerkung: Anstelle von Ungleichung 6.5.13 im Skript, kann man auch Theorem 6.4.2/Korollar 6.4.3 **(0.5 P.)** zusammen mit Theorem 6.5.5 (*Minimalitätseigenschaft* der Chebychev-Polynome; **(1 P.)**) anwenden und so (3) erhalten **(0.5 P.)**.

Siehe nächstes Blatt!

Die Identität $\exp' = \exp$ zeigt, dass

$$\underbrace{|\exp'''|_{\infty,[-1,1]} = |\exp|_{\infty,[-1,1]} \leq \exp(1)}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(0.5 P.)} \tag{4}$$

(3) und (4) zeigen, dass

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\exp(x) - p(x)| \leq \frac{|\exp'''|_{\infty,[-1,1]}}{3!\,2^2} \leq \underbrace{\frac{\exp(1)}{3\cdot 8}}_{\textbf{(0.5 P.)}} \leq \underbrace{\frac{3}{3\cdot 8} = \frac{1}{8}}_{\textbf{(0.5 P.)}}.$$

7. (8 Punkte)

a) (1 Punkte)
Es gilt $Y_0 = 1$ und

$$\underbrace{Y_1 = Y_0 + hf(Y_0) = (1+2h)Y_0 = 2Y_0}_{\textbf{(0.5 P.)}} \underbrace{= 2\cdot 1 = 2}_{\textbf{(0.5 P.)}}. \qquad \textbf{(1 P.)}$$

b) (2 Punkte)
Es gilt

$$\underbrace{\begin{aligned} Z_{k+1} &= Z_k + hf(Z_{k+1}) = Z_k + 2hZ_{k+1} \\ \Leftrightarrow (1-2h)Z_{k+1} &= Z_k \\ \Leftrightarrow Z_{k+1} &= \frac{1}{(1-2h)}Z_k = \frac{1}{(1-2/3)}Z_k = 3Z_k \end{aligned}}_{\textbf{(1 P.)}}$$

Also $Z_0 = 1$, $Z_1 = 3Z_0 = 3$, $Z_2 = 3Z_1 = 9$ und $Z_3 = 3Z_2 = 27$. **(1 P.)**

c) (5 Punkte)
Es gilt für alle $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \Psi(t,x) &= x + 2tx + 2t^2x + \tfrac{4}{3}t^3x \\ \Psi_t(t,x) &= 2x + 4tx + 4t^2x \qquad \textbf{(0.5 P.)} \\ \Psi_{tt}(t,x) &= 4x + 8tx \qquad \textbf{(0.5 P.)} \\ \Psi_{ttt}(t,x) &= 8x. \qquad \textbf{(0.5 P.)} \end{aligned}$$

(Hier bezeichnen Ψ_t, Ψ_{tt}, Ψ_{ttt} die partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}\Psi$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi$, $\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Psi$.) Das folgt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x = \Psi(0,x) \qquad \textbf{(0.5 P.)} \tag{5}$$

$$f(x) = 2x = \Psi_t(0,x) \qquad \textbf{(0.5 P.)} \tag{6}$$

$$f'(x)f(x) = 4x = \Psi_{tt}(0,x) \qquad \textbf{(0.5 P.)} \tag{7}$$

$$f''(x)(f(x),f(x)) + f'(x)f'(x)f(x) = 8x = \Psi_{ttt}(0,x). \qquad \textbf{(0.5 P.)} \tag{8}$$

Bitte wenden!

Zu (i): **Ja**, wegen (5)–(6). **(0.5 P.)**
Zu (ii): **Ja**, wegen (5)–(7). **(0.5 P.)**
Zu (iii): **Ja**, wegen (5)–(8). **(0.5 P.)**