

Serie 9

1. Wie in der Vorlesung sei $\omega_N := e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ die N -te Einheitswurzel,

$$\vec{\omega}_N^k := \begin{pmatrix} \omega_N^{k \cdot 0} \\ \omega_N^{k \cdot 1} \\ \vdots \\ \omega_N^{k \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

und $F_N := (\vec{\omega}_N^0 \ \vec{\omega}_N^1 \ \dots \ \vec{\omega}_N^{N-1}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ die Fouriermatrix. Zeigen Sie, dass die skalierte Fourier-Matrix $\frac{1}{\sqrt{N}}F_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ symmetrisch und unitär ist:

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N}F_N^H = \frac{1}{N}\overline{F_N}.$$

2. Sei $N = 2n$ gerade,

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N, \quad x_{\text{odd}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{und} \quad x_{\text{even}} := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

- a) Zeigen Sie, dass

$$F_N x = \begin{pmatrix} F_n x_{\text{even}} \\ F_n x_{\text{odd}} \end{pmatrix} + \vec{\omega}_N^1 * \begin{pmatrix} F_n x_{\text{odd}} \\ F_n x_{\text{even}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei $*$ wie in Matlab die elementweise Multiplikation bezeichnet. Diese Gleichung liefert das Grundprinzip der schnellen Fouriertransformation (Im Englischen fast fourier transform und abgekürzt mit fft).

- b) Sei nun $N = 2^q$. Schreiben Sie ein Matlabprogramm *myfft* welches die diskrete Fouriertransformation eines Vektors $x \in \mathbb{C}^N$ rekursiv mithilfe der Gleichung (1) löst. Testen Sie Ihr Programm indem Sie auf denselben Vektor die Matlabfunktion *fft* und ihre Funktion *myfft* anwenden und die Resultate vergleichen.

- c) Schätzen Sie den Aufwand einer direkten DFT (diskrete Fouriertransformation) mit Matrixmultiplikation und einer DFT wie in b) ab.

3. Datenanalyse mit FFT

Zunächst wollen wir uns mit der in Matlab implementierten diskreten Fourier-Transformation bekannt machen:

- a) Berechne hierzu die diskrete Fourier-Transformation an den $N = 30$ äquidistanten Stützstellen $2j/N - 1$, $j = 0, \dots, N - 1$ für $f_1(x) = \cos(10\pi x)$, $f_2(x) = f_1(x) + \cos(5\pi x)$ und $f_3(x) = e^{-\pi x^2}$.
 Plote das Betragsquadrat der Fourier Koeffizienten $|c_k|^2$ als Funktion des Koeffizienten index k für $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$.
 Hinweis: verwende den Matlabbefehl `fft`.

Erkenntnis in zeitabhängige gemessene Daten kann häufig durch deren Analyse im Frequenzraum gewonnen werden. Wir wollen dies anhand der in der Serie 6, Aufgabe 3 behandelten Brücke erläutern. Dort hatten wir die natürlichen Eigenschwingungen einer Modell-Brücke untersucht. Vernachlässigt man die Schwerkraft so erhält man folgende Differentialgleichung

$$m\ddot{\Delta \mathbf{r}} = -A\Delta \mathbf{r} \quad (2)$$

als einfaches mathematisches Modell für die Bewegung der Gelenkkoordinaten. Wo bei $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ die symmetrische und positiv definite Matrix aus Serie 6 Aufgabe 3 ist. Die Brücke sei zum Zeitpunkt $t = 0$ um eine Verschiebung $d_0 \in \mathbb{R}^{16}$ aus ihrem Gleichgewichtszustand ausgelenkt. Seien $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^{16}$, $j = 1, \dots, 16$ die Eigenvektoren von A und $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, 16$ die entsprechenden Eigenwerte. Sei zudem

$$d_0 = \sum_{j=1}^{16} \gamma_j \mathbf{v}_j \quad (3)$$

die Entwicklung der Anfangsauslenkung d_0 in die Eigenvektoren der Matrix A .

- b) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung (2) mit den Anfangsbedingungen $\Delta \mathbf{r}(0) = d_0$ und $\dot{\Delta \mathbf{r}}(0) = 0$ an.

Im weiteren wollen wir nun annehmen, dass wir die Matrix A nicht kennen und statt dessen die tatsächlichen Schwingung experimentell bestimmt haben, d.h. uns ist gegeben die Messung der Auslenkungen der Gelenke $\Delta \mathbf{r}(t)$ im Zeitintervall $t \in [0, T)$ und wir wollen nun die Eigenfrequenzen des zugrunde liegenden Systems bestimmen.

In der Datei *bridge.dat* finden Sie die gemessenen Gelenkpositionen an $N = 4096$ äquidistant verteilten Zeitpunkten bis $T = 20$ s.

Siehe nächstes Blatt!

- c) Plote (mit *loglog*) das Energiespektrum (engl.: power spectrum) für die x und y Koordinaten des ersten Gelenks. Das Energiespektrum ist die Zuordnung des Betragsquadrats $|c_k|^2$ der Fourier-Entwicklungskoeffizienten c_k zu der entsprechenden Frequenz $\omega_k = k/T$. Vergleiche die gemessenen Hauptfrequenzen (dort wo es signifikante Ausschläge gibt) mit den tatsächlichen Eigenfrequenzen $\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi}$, $i = 1, 16$, des Tragwerks.

Hinweis: verwende das Template *bridge_fft_template.m*

4. Gibbs-Phänomen

Sei $a, b \in (0, 1)$ mit $a < b$ und $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$(0, 1) \ni t \mapsto f(t) = \begin{cases} 1 & : t \in [a, b] \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

- a) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x}$ und

$$\alpha_k := \langle \varphi_k, f \rangle = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} f(x) dx$$

Berechnen Sie α_k für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- b) Schreiben Sie ein Matlabprogramm welche die Funktionen f und $f_n := \sum_{k=-n}^n \alpha_k \varphi_k$ für $n = 5, 25, 100, 500$ und $(a, b) = (0.25, 0.75)$ plottet. Geben Sie zudem $\|f_n\|_\infty$ aus. Was fällt ihnen auf?

- c) Wiederholen Sie b) verwenden Sie diesmal aber die Funktionen $g_n := \sum_{k=-n}^n \tilde{\alpha}_k \varphi_k$ mit

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f\left(\frac{j}{2n+1}\right) e^{\frac{-2\pi i j k}{2n+1}}.$$