Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 12

1. Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Stützstellen und $w_1, \ldots, w_n$ die Gewichte der Gaussquadratur mit n Stützstellen. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei l_i das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $n-1$, dass die Interpolationsaufgabe

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}$$

löst. Zeigen Sie, dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx = \int_{-1}^{1} l_i^2(x)dx$$

gilt.

2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $T_n[f]$ das Ergebnis der zusammengesetzten Trapezregel mit n Intervallen gleicher Länge angewandt auf f. Aus der Euler-Maclaurin Formel lässt sich folgendes Resultat ableiten:
Falls $f \in C^{2m+2}$ ($2m+2$ mal stetig differenzierbar), $h := (b-a)/n$ so gibt es ein Polynom q vom Grad $m-1$ mit

$$T_n[f] = \int_a^b f(x)dx + h^2 q(h^2) + \mathcal{O}(h^{2m+2}).$$

a) Leiten Sie mithilfe des obigen Resultats für $m = 1$ eine Quadraturregel mit Konsistenzordnung 4 her. Wählen Sie dazu eine geeignete Linearkombination von T_1 und T_2. Zeigen Sie das die so konstruierte Quadraturregel mit der Simpsonregel übereinstimmt.

b) *Aitken-Neville*
Seien $n_1, \ldots n_m \in \mathbb{N}$ und $h_k := (b-a)/n_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Für $1 \leq i \leq j \leq m$ bezeichne $p_{(i,j)}$ das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $j-i$, welches die Interpolationsaufgabe

$$p_{(i,j)}(h_k^2) = T_{n_k}[f], \; k = i, \ldots, j,$$

Bitte wenden!

erfüllt. Zeigen Sie, dass für $1 \leq i \leq j < m$

$$p_{(i,j+1)}(x) = \frac{x - h_i^2}{h_{j+1}^2 - h_i^2} p_{(i+1,j+1)}(x) - \frac{x - h_{j+1}^2}{h_{j+1}^2 - h_i^2} p_{(i,j)}(x)$$

gilt.

c) *Für* $1 \leq i \leq j \leq m$ *sei nun*

$$T_{(i,j)}[f] := p_{(i,j)}(0).$$

Zeigen Sie die Rekursionsgleichung

$$T_{(j,j+k)}[f] = T_{(j+1,j+k)}[f] + \frac{T_{(j+1,j+k)}[f] - T_{(j,j+k-1)}[f]}{\left(\frac{n_{j+k}}{n_j}\right)^2 - 1}. \tag{1}$$

d) *Romberg-Verfahren*
Berechnen Sie mithilfe von (1) *rekursiv* $T_{(i,j)}[f]$ *für* $f(x) = \sin(x), a = 0, b = \pi$, *der Romberg-Folge* $n_k := 2^{k-1}$ *und* $i, j \leq 7$. *Sie können für diese Teilaufgabe die Funktion* $myquad$ *aus Serie 11 verwenden. Plotten Sie* $T_{n_k}[f]$ *und* $T_{(1,k)}[f]$ *für* $k = 1, \ldots, 7$ *in einem Diagramm.*

3. *Euler-Verfahren*
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T > 0$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Wir betrachten das AWP (Anfangswertproblem)*

$$\dot{y} = f(y) \quad \text{and} \quad y(0) = y_0$$

wobei eine Funktion $y\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ *gesucht ist.*

a) *Lösen Sie das AWP für* $f(y) := -y$, $y_0 := 1$ *und* $T > 0$ *exakt.*

b) *Wir möchten nun eine approximative Lösung* $y_0, \ldots, y_n$ *auf dem Gitter* $0, h, 2h, \ldots$ *mit Schrittweite* $h > 0$ *berechnen. Das heisst es soll* $y_i \approx y(hi)$ *gelten. Wir verwenden dazu die folgende Rekursionsvorschrift*

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_k). \quad \text{(explizites Eulerverfahren)}$$

Plotten Sie die exakte und die numerische Lösung für $f(y) := -y$, $h = 0.1, 0.5, 1.5$ *und* $T = 10$. *Für welche* h *ist die numerische Lösung qualitativ richtig?*

c) *Verwenden Sie nun die Schrittweiten* $h = 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-10}$ *und* $T = 10$. *Plotten Sie den Fehler*

$$\max_{0 \leq i \leq 10h^{-1}} |y(hi) - y_i|$$

in Abhängigkeit von h. *Welche Art der Konvergenz beobachten Sie?*

Siehe nächstes Blatt!

d) *Wiederholen Sie b) und c) mit*

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_{k+1}) \quad \textit{(implizites Eulerverfahren)}$$

anstelle des expliziten Eulerverfahrens. Lösen Sie dazu zuerst die obige Gleichung (wobei $f(x) = -x$) nach y_{k+1} auf.