Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 13

1. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -2xy^2, \quad y(1) = 1. \tag{1}$$

Sei $h > 0$ und $x_j = 1 + jh$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und y_j eine Approximation für $y(x_j)$. Wie in der Vorlesung benützen wir den Taylorreihenansatz

$$y(x) \approx y_j + c_1(x - x_j) + c_2(x - x_j)^2 + c_3(x - x_j)^3 + c_4(x - x_j)^4. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie wie in der Vorlesung eine Approximation für $y'(x_{j+1})$ einerseits durch Differenzieren der rechten Seite von (2) und anderseits mithilfe von (1). Bestimmen Sie dann durch Koeffizientenvergleich Gleichungen für c_1, c_2, c_3 und c_4.

b) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems (1).

c) Implementieren Sie das Taylor-Reihen Verfahren gemäss a). Plotten Sie den lokalen Fehler an der Stelle $x = 1$ und den globalen Fehler an der Stelle $x = 2$ für $h = 2^{-1}, \ldots, 2^{-10}$. Welche Konsistenzordnung beobachten Sie für den lokalen Fehler? Welche Konvergenzordnung besitzt der globale Fehler?

2. Ein Massenstück der Masse $m \in (0, \infty)$ hängt an einer Feder mit Federkonstanten $D \in (0, \infty)$. Schwingt dieses System, kann dies durch eine Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die einem Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ die aktuelle Position des Massenstücks im Vergleich zur Ruhelage zuordnet, beschrieben werden. Im idealisierten, reibungsfreiem Fall gehorcht x der Differentialgleichung

$$\forall t \in [0, \infty) : \; y''(t) + \frac{D}{m} y(t) = 0 \; . \tag{3}$$

Durch die Wahl von Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \; , \quad y'(t_0) = v_0 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

ist y eindeutig bestimmt.

Bitte wenden!

a) Welche Ordnung besitzt die gewöhnliche Differentialgleichung (3)?

b) Überführen Sie die Differentialgleichung (3) und die Anfangsbedingungen (4) in ein Anfangswertproblem erster Ordnung mit entsprechenden Anfangsbedingungen.

c) Lösen Sie mithilfe der Matlabfunktion *ode45* obige Differentialgleichung mit $D = m = 1$ auf dem Interval $[0, 10]$ mit den Anfangsbedingungen $y_0 = 1$ und $v_0 = 0$ und plotten Sie die Energie

$$E(t) = \frac{m}{2} y'(t)^2 + \frac{D}{2} y(t)^2, \ t \in [0, 10].$$

Ist die Lösung physikalisch korrekt?

d) Die implizite Trapezregel lautet

$$\phi(t_j, y_j, y_{j+1}, h) = \frac{f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})}{2}.$$

Implementieren Sie die implizite Trapezregel und bestimmen Sie mit denselben Parameter wie in c) die numerische Lösung für verschiedene $h > 0$. Plotten Sie den Fehler zwischen numerischer und exakter Energie. Was fällt Ihnen auf?
Tipp: Benützen Sie $fsolve$ um das Gleichungssystem der impliziten Trapezregel zu lösen.

3. *Steife Differentialgleichung*
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad A := \begin{pmatrix} -0.5 & 32.6 & 35.7 \\ 0 & -48 & 9 \\ 0 & 9 & -72 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Berechnen Sie (von Hand oder mit Matlab) die exakte Lösung des Anfangswertproblems. Plotten Sie die drei Komponenten der Lösung im Interval* $[0, 1]$.

b) *Berechnen Sie mit dem explizitem Eulerverfahren eine numerische Lösung auf dem Interval* $[0, 1]$ *für die Schrittweiten* $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. *Für welche* h *ist die Lösung qualitativ richtig?*

c) *Wiederholen sie* $b)$ *mit dem impliziten anstelle des expliziten Eulerverfahrens.*

d) *Berechnen Sie die numerische Lösung des expliziten Eulerverfahrens wobei wir diesmal zwei verschiedene Schrittweiten wählen. Im Interval* $[0\ 0.2]$ *die Schrittweite* $hs = 10^{-2}$ *und im Interval* $[0.2\ 1]$ *die Schrittweite* $hl = 10^{-1}$.