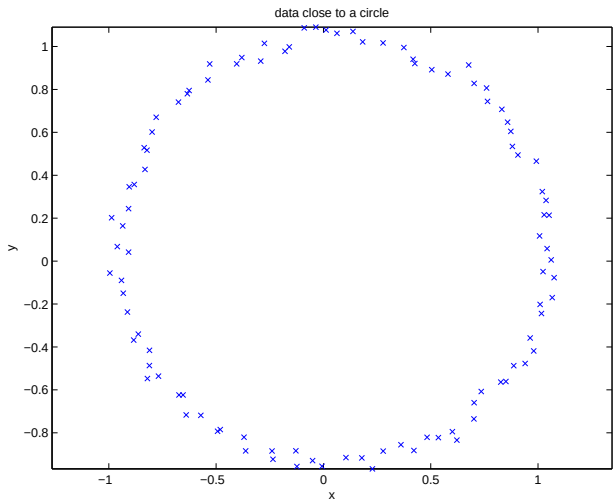
Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

# Serie 5

**1.** Approximation eines Kreises
Eine Menge von Messpunkten (siehe Bild unten) liegen ungefähr auf einem Kreis mit unbeknanntem Mittelpunkt und Radius.




Ein Kreis mit Mittelpunkt $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$ ist durch die Gleichung

$$(m_1 - x)^2 + (m_2 - y)^2 = r^2 \tag{1}$$

bestimmt. Mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung kann man nun versuchen einen Kreis zu bestimmen, der die gegebenen Daten gut approximiert. Dabei hängt das Ergebnis und der Rechenaufwand wesentlich von der mathematischen Formulierung des Ausgleichsproblems ab.

**a)** Formulierung als lineares Ausgleichsproblem.
Setzen wir die Daten $(x_i, y_i)$ in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir ein überbestimmtes lineares System für die drei Unbekannten:

$$m_1, m_2, c := r^2 - m_1^2 - m_2^2.$$

Bestimmen Sie die Matrix $A$ und die rechte Seite $b$ des Ausgleichsproblem. Implementieren Sie eine Matlabfunktion $circle_linear_fit(x, y)$ die in $x$ und $y$ die

**Bitte wenden!**

Daten erhält und das lineare Ausgleichsproblem löst. Laden Sie die Daten in der Datei $messpunkte.m$ auf der Vorlesungshomepage herunter und lösen Sie das Ausgleichsproblem.

**b)** Formulierung als nicht-lineares Ausgleichsproblem.
Eine andere Möglichkeit besteht darin den Abstand zwischen den Daten und dem (unbekannten) Kreis:

$$d_i = |\sqrt{(m_1 - x_i)^2 + (m_2 - y_i)^2} - r|$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate zu minimieren, d.h. Parameter $r, m_1, m_2$ zu bestimmen, so dass die Summe $\sum_i d_i^2$ minimal wird. Dies ist dann ein nicht-lineares Ausgleichsproblem

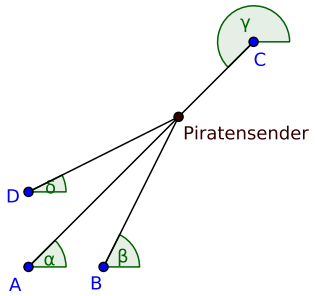
$$z^* = \operatorname*{argmin}_z \Phi(z)$$

wobei

$$\Phi(z) := \frac{1}{2}\|F(z)\|^2.$$

Was ist in diesem Fall die Funktion $F$? Berechnen Sie den Gradienten von $\Phi$. Schreiben Sie eine Matlabfunktion $circle_gaussnewton(x, y)$ welche in $x$ und $y$ die Daten erhält und das Ausgleichsproblem mit dem Gauss-Newton-Verfahren löst. Starten Sie mit den Anfangswerten $m_1 = 0, m_2 = 0$ und $r = 1$. Führen Sie solange Iterationsschritte durch bis die Änderung der Daten $(m_1, m_2, r)$ von einem Schritt zum nächsten gemessen in der 2-Norm kleiner als $10^{-14}$ ist. Wieviele Iterationsschritte sind dazu nötig?

**2.** Orten eines Radiosenders
Ziel dieser Aufgabe ist den Standort eines Piratensender zu ermitteln. Dazu werden an vier Messstationen $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (3, 3), D = (0, 1)$ die Richtung (gegenüber der x-Richtung) von dem aus das Signal des Piratensender kommt gemessen (siehe Bild). Die gemessenen Winkel sind $\alpha = 44°, \beta = 63°, \gamma = 225°$ und $\delta = 26°$.




Bestimmen Sie mit dem Gauss-Newton-Verfahren die Koordinaten des Piratensenders so, dass die Winkel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert werden.

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** Herr Müller glaubt, dass ein Gast laut Gaststättenverordnungein das Recht hat, seine Suppe mit mindestens $60°$C auf den Tisch gestellt zu bekommen. Diesen Monat findet Herr Müller seine Suppe zu kalt. Ärgerlich holt er sein Taschenthermometer heraus und misst die Temperatur $y_i$ seiner Suppe zu verschiedenen Zeitpunkten $t_i$.

| $t_i[min]$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i[°\text{ C}]$ | 47 | 36 | 31 | 27 | 24 | 23 |

Dabei sind $t_i$ die vergangenen Minuten, seit dem seine Suppe auf dem Tisch steht. Er weiss, dass die Temperatur seiner Suppe exponentiell abnimmt und sich der Raumtemperatur $x_1$ anpasst. Die Temperaturverlaufsfunktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kann damit angesetzt werden als

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 e^{-x_3 t} \ . \tag{2}$$

Wir betrachten nun die Fehlerfunktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} f(t_1, x_1, x_2, x_3) - y_1 \\ \vdots \\ f(t_6, x_1, x_2, x_3) - y_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Das Ziel der Aufgaben 3 und 4 ist Koeffizienten $x_1^*, x_2^*, x_3^* \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass

$$\|F(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\|_2 = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} \|F(x)\|_2 \tag{3}$$

gilt.

**a)** Bestimmen Sie die Jacobimatrix von $F$ und implementieren Sie das Gauss-Newton-Verfahren um das nichtlineare Kleinste-Quadrate-Problem (3) zu lösen. Wählen Sie als Startwert $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (25, 45, 0.3)$. Sei $(x^{(k)})_{k \in N_0}$ die Folge der Iterationen. Nach wie vielen Iterationen $N \in \mathbb{N}$ ist die Norm der Korrektur, i.e. $\|x^{(N)} - x^{(N+1)}\|$ kleiner als $10^{-13}$?

**b)** Stellen Sie $\|x^{(k)} - x^{(N+1)}\|_2$ für $k = 0, \ldots, N$ in einem halblogarithmischen Plot dar. Was beobachten Sie?

**c)** Schätzen Sie nun die Temperatur der Suppe zum Zeitpunkt $t = 0$ ab. Zu welchem Ergebnis kommt Herr Müller? Hat er also einen Vorwand sich zu beschweren oder nicht?

**4.** Lösen Sie Aufgabe 3 mit dem Newtonverfahren anstelle des Gauss-Newton-Verfahrens. Kommen Sie bei c) auf ein anderes Ergebnis als bei Aufgabe 3?

**Bitte wenden!**

**5.** Sie finden auf der Vorlesungshomepage die Datei $ausgleichsproblem.m$, welche eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{8\times 5}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^8$ enthält.

**a)** Bestimmen Sie mit Matlab den Rang von $A$ (Matlabbefehl $rank$).

**b)** Lösen Sie das Ausgleichsproblem mithilfe der Singulärwertzerlegung (Matlabbefehl $svd$). Geben Sie die Lösung $x$ mit der kleinsten 2-Norm an. Berechnen Sie die 2-Norm des Residuums $Ax - b$ und die 2-Norm von $x$.

**c)** Lösen Sie, dass Ausgleichsproblem mit dem Backslashoperator. Berechnen Sie wiederum die 2-Norm des Residuums $Ax - b$ und die 2-Norm von $x$. Vergleichen Sie mit b).