Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 8

1. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf X. Sei $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ definiert durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ für alle $f \in X$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist.

2. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf X und $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ die induzierte Norm (siehe Aufgabe 1). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X_n \subset X$ ein n-dimensionaler Unterraum von X und $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ eine Orthonormalbasis von X_n (d.h. $\langle \Phi_i, \Phi_j\rangle = \delta_{ij}$ und $X_n = \text{span}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$). Zeigen Sie

a) für $f \in X_n$ gilt $f = \sum_{i=1}^n \langle f, \Phi_i\rangle \Phi_i$,

b) für $f \in X_n$ ist $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \Phi_i, f\rangle|^2$,

c) für $f \notin X_n$ ist $f_n := \sum_{i=1}^n \langle f, \Phi_i\rangle \Phi_i$ die Bestapproximation von f aus X_n, dass heisst es gilt

$$\|f - f_n\| < \|f - g\| \qquad \text{für alle } g \in X_n \backslash \{f_n\},$$

d) für alle $f \in X$ ist $\sum_{i=1}^n |\langle \Phi_i, f\rangle|^2 \leq \|f\|^2$.

3. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$ das n-te Chebyshev-Polynom durch

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)) \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

a) Zeigen Sie, dass T_n tatsächlich ein Polynom ist.
Tipp: Benutzen Sie die trigonometrische Identität

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

um die Rekursionsgleichung $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ herzuleiten.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten von T_5, dass heisst bestimmen Sie $a_5, \ldots, a_0$ so, dass

$$T_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + \cdots + a_0$$

gilt.

Bitte wenden!

c) Bestimmen Sie die Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ von T_n.

d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1]$ die Darstellung

$$T_n(x) = c_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

gilt mit $c_n \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie c_n.

e) Zeigen Sie für $n > 0$, dass

$$\left| \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \right| \leq 2^{-(n-1)}$$

gilt.

f) Zeigen Sie, dass die Chebyshev-Polynome T_n orthogonal sind bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

4. Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$[-1, 1] \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \in \mathbb{R}.$$

Interpolieren Sie f sowohl mit n äquidistanten Stützstellen (d.h. $t_i = -1 + \frac{1+2i}{n}$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$) als auch mit n Chebychev-Stützstellen (d.h. $t_i = \cos(\frac{1+2i}{2n}\pi)$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$) für $n = 1, 2, \ldots, 30$. Berechnen Sie eine Approximation für die Fehlernorm $\|f - p_n\|_\infty$ und plotten Sie diese. Verwenden Sie dazu für $m \geq 10^4$ die Approximation

$$\|f - p_n\|_\infty \approx \max_{i \in \{0,1,\ldots,m\}} \left| f\left(-1 + {}^{2i}/_{m}\right) - p_n\left(-1 + {}^{2i}/_{m}\right) \right|$$

um die Fehlernorm anzunähern. Sie können für diese Aufgabe den Code aus Serie 7 Aufgabe 3 verwenden. Falls Sie diese Aufgabe nicht gelöst haben können Sie den Code von der Vorlesungsseite herunterladen.