Serie 12

1. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $p \in [1, \infty]$ und q konjugiert zu p, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie: Jedes $g \in L^q$ liefert ein stetiges lineares Funktional $F_g \in (L^p)^*$ via

$$F_g(f) := \int fg \, d\mu \, .$$

Die Abbildung $g \mapsto F_g$ ist linear, ordnungstreu und für $p \in (1, \infty]$ immer isometrisch, d.h. $\|F_g\| = \|g\|_{L^q}$. Diese Isometrie gilt auch für $p = 1$, falls μ σ-endlich ist.

2. Betrachten Sie $(I := [0,1], \mathcal{B}(I), \lambda)$ und $(I^3, \mathcal{B}(I^3), \lambda^3)$. Sei $f : I^3 \to [-\infty, \infty]$ definiert als

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}} & \text{falls } y \neq z \, , \\ \infty & \text{falls } y = z \, . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

a) $f \in L^1(\lambda^3)$ ist;

b) für jedes $z \in I$ die Menge

$$Y(z) := \left\{ y \in I : \int f(x,y,z) \, dx = \infty \right\}$$

nicht leer und abhängig von z ist.

`Hinweis`**:** Der Satz von Fubini gilt statt für integrierbare Funktionen auch für Funktionen ≥ 0; dann ist er als Satz von Tonelli bekannt.

3. Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, zwei Massräume mit $\mu_1(\Omega_1) < \infty$. Seien ferner K ein Übergangskern von Ω_1 nach $\mathcal{A}_2$ und $f \geq 0$ eine $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$-messbare Funktion.

Finden Sie eine $\mathcal{A}_1$-messbare Funktion g, die für alle $B \in \mathcal{A}_1$ die Identität

$$\int I_B \, g \, d\mu_1 = \int I_{B \times \Omega_2} \, f \, d(\mu_1 \times K)$$

erfüllt.

`Bemerkung`**:** Ist μ_1 ein Wahrscheinlichkeitsmass und K eine Übergangswahrscheinlichkeit, so liefert $g(X_1)$ eine Version der bedingten Erwartung von $f(X_1, X_2)$ gegeben $\sigma(X_1)$ unter $\mu_1 \times K$.

Bitte wenden!

- **Vorbesprechung:** Diese Serie wird am 15.05.2015 in den Übungen vorbesprochen.
- **Abgabetermin:** Bis 20.05.2015, 12 Uhr, im Vorraum zum HG F 28.
- **Testatbedingung:** Keine; der Inhalt der Übungen gehört aber auch zum Prüfungsstoff.
- **Präsenz:** Mo, Mi und Do ist die Präsenz im HG G 19.1 oder HG G 19.2 zwischen 12 und 13 Uhr. Dort werden fachliche Fragen zur Vorlesung und den Übungen beantwortet.

Übungsgruppen

Assistent	**Ort**	**Zeit**
Alexandru-Dumitru Paunoiu	HG D 5.1 (EN)	Fr. 10-12 Uhr
Igor Uljarevic	HG E 33.5 (EN)	Fr. 10-12 Uhr
José Luis Hablützel Aceijas	HG D 3.3 (DE)	Fr. 10-12 Uhr
Louis Correia Soares	HG D 3.1 (DE)	Fr. 10-12 Uhr

Informationen zur Vorlesung und den Übungen sind unter:
http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/math/massuint
Bei Fragen zu den Übungen oder dem Übungsbetrieb wendet euch an:
Luca Galimberti, `luca.galimberti@math.ethz.ch`.