Satz von Green

In diesem Abschnitt möchten wir den Satz von Green I für eine spezielle Klasse von Gebieten beweisen. Es lässt sich leicht zeigen, dass alle Gebiete in solchen Gebieten zerlegt werden können.

Satz von Green I. *Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine einfache, geschlossene, positiv orientierte Kurve, welche ein zusammenhängendes und einfach-zusammenhängendes Gebiet $R \subset \mathbb{R}^2$ begrenzt (also $\partial R = C$). Sei $\mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ ein Vektorfeld auf R mit stetigen ersten partiellen Ableitungen. So gilt*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dA$$

Beweis: Wir beweisen den Satz für den Spezialfall

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\} \end{aligned}$$

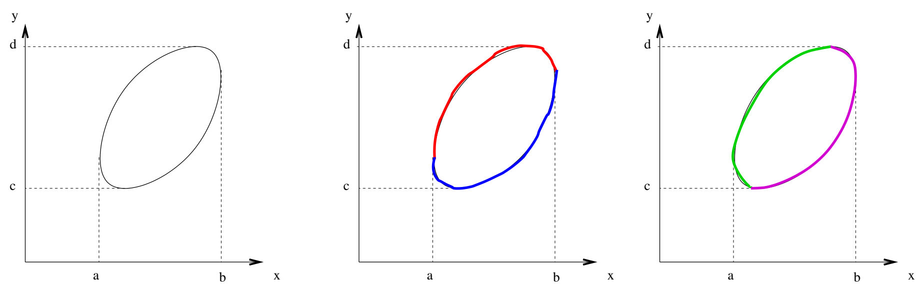

Figure 1: Das Gebiet R normal, einmal mit $y = g_1(x)$ in blau und $y = g_2(x)$ in rot und einmal mit $x = h_1(y)$ in grün und $x = h_2(x)$ in violet

Zu beweisen ist die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C F_1(r(t))x'(t) + F_2(r(t))y'(t) \, dt \\ &= \oint_C F_1(x,y) \, dx + \oint_C F_2(x,y) \, dy \\ &= \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \, dA \end{aligned}$$

wobei wir folgende Substitutionen verwendet haben $x = x(t)$ und $y = y(t)$. Wir werden nun zeigen, dass

$$-\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\,dA = \oint_C F_1(x,y)\,dx$$

und

$$\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\,dA = \oint_C F_2(x,y)\,dy$$

und damit wäre der Satz bewiesen. Wir verwenden die erste Beschreibung vom Gebiet R (also mit den blauen und roten Funktionsgraphen) und erhalten

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\,dydx \\
&= \int_a^b \left[F_1(x,y)\right]_{g_1(x)}^{g_2(x)}\,dx \\
&= \int_a^b F_1(x,g_2(x)) - F_1(x,g_1(x))\,dx \\
&= -\int_b^a F_1(x,g_2(x))\,dx - \int_a^b F_1(x,g_1(x))\,dx \\
&= -\oint_C F_1(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, indem man die zweite Beschreibung von R verwendet, dass

$$\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\,dA = \oint_C F_2(x,y)\,dy$$

und damit ist der Satz bewiesen. ■x