Beweis des Hauptsatzes für Linienintegrale

Hauptsatz für Linienintegrale (2d-Version): *Sei* $\mathbf{F}$ *ein stetiges Vektorfeld auf* $R \subset \mathbb{R}^2$ *und* $C \subset R$ *eine glatte orientierte Kurve von* A *nach* B, *mit* $A, B \in R$. *Dann gilt: Das Vektorfeld* $\mathbf{F}$ *ist konservativ dann und nur dann wenn das Linienintegral von* $\mathbf{F}$ *wegunabhängig ist d.h.*

$$\exists \phi : R \to \mathbb{R}, \mathbf{F} = \nabla \phi \iff \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

Wir haben in der Vorlesung schon gesehen, dass wenn $\mathbf{F}$ konservativ ist, das Linienintegral wegunabhängig ist (folgt in Wesen aus der Kettenregel). Wir werden hier die andere Richtung zeigen, d.h. wir werden, wenn das Linienintegral wegunabhängig ist, zeigen wie man das Potential konstruiert.

Beweis: Wir werden nun eine Funktion ϕ konstruieren, so dass $\mathbf{F} = \nabla \phi$. Wähle einen Punkt $(a, b) \in R$ und setze

$$\phi(x, y) := \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Da wir voraussetzen, dass das Linienintegral wegunabhängig ist, ist die Funktion ϕ wohl-definiert. Wir wählen nun den Weg $C = C_1 \cup C_2$ illustriert in Abbildung 1, beachte dabei, dass der zweite Teil vom Weg horizontal verläuft.

Also,

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F}(r_1(t)) \cdot \mathbf{r_1}'(t)\, dt + \int_{(x_1,y)}^{(x,y)} \mathbf{F}(r_2(t)) \cdot \mathbf{r_2}'(t)\, dt
\end{aligned}$$

wobei das erste Integral unabhängig von x ist und das zweite Integral umgeschrieben werden kann, mit Hilfe der Parametrisierung $r_2(t) = (x_1 + t, y)$ mit $0 \leq t \leq x - x_1$ und somit $r_2'(t) = (1, 0)$, zu

$$\int_0^{x-x_1} F_1(x_1 + t, y)\, dt = \int_{x_1}^{x} F_1(\xi, y)\, d\xi$$

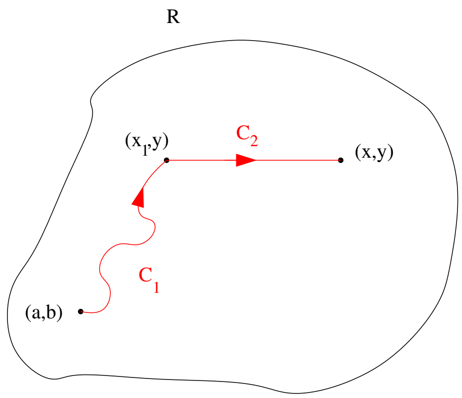

Abbildung 1: Ein spezieller Weg C im Bereich R

wobei wir die Substitution $\xi = x_1 + t$ durchgeführt haben. Betrachte jetzt die partielle Ableitung von ϕ nach x

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} F_1(\xi, y)\, d\xi = F_1(x,y).$$

Analog kann man zeigen, dass $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y)$ und somit ist ϕ ein Potential von $\mathbf{F}$ und das Vektorfeld also konservativ und damit ist der Satz bewiesen.

$\blacksquare$