Clicker Fragen

Frage 1

Die Aussagen: "Zwei verschiedene Niveaulinien schneiden sich nie"

√ ◯ ist richtig

◯ ist falsch

Nehmen Sie an, der Punkt $P = (x, y)$ wäre ein Punkt der Niveaulinie $f(x, y) = c_1$ und der Niveaulinie $f(x, y) = c_2$ mit $c_1 \neq c_2$. So hätte die Funktion f an der Stelle P zwei Funktionswerten. Dies ist in Widerspruch zum Funktionsbegriff.

Frage 2

Die Aussagen: "Eine Niveaulinie schneidet sich selber nie"

◯ ist richtig

√ ◯ ist falsch

Es reicht hier ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Betrachte z.B. die Funktion $f(x, y) = xy$ und die Niveaulinie $f(x, y) = 0$. Diese besteht aus der x- und der y-Achse, die sich bekannterweise im Ursprung schneiden. Es lässen sich sehr leicht weitere Beispiele konstruieren, z.B. für die Funktion $f(x, y) = (y - x^2 + 4)(y + x^2 - 4)$ besteht die Niveaulinie zum Funktionswert 0 aus den beiden Parabeln $y = x^2 - 4$ und $y = -x^2 + 4$, die zwei gemeinsame Schnittpunkte haben, usw.

Frage 3

Die Niveaufläche der Funktion $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ zu Niveau $c = 0$

◯ ist eine Sphäre

√ ◯ ist ein Doppelkegel

◯ ist ein Paraboloid

◯ ist ein Hyperboloid

Wir betrachten also die Gleichung $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ oder äquivalent $y^2 = x^2 + z^2$. In dieser Form sehen wir, dass die beschriebene Fläche rotationssymmetrisch ist bez. der y-Achse (der y-Wert ist - bis auf dem Vorzeichen - eindeutig bestimmt durch die Summe $x^2 + z^2$; Punkte für welche diese Summe konstant ist, bilden Kreisen um die y-Achse). Es reicht also uns ein Bild zu verschaffen von der Schnitt mit der yz-Ebene und diese Kurve dann um die y-Achse zu rotieren. In der yz-Eben gilt $x = 0$ also wird die Gleichung $y^2 = z^2$, was wieder äquivalent ist zu $z = \pm y$: zwei Geradengleichungen. Rotiert man eine dieser beiden Geraden um die y-Achse, so entsteht ein Doppelkegel.

Frage 4

Sei $f(x, y, z)$ eine dreimal stetig-differenzierbare Funktion. So hat f höchstens

- ◯ 3 verschiedene partielle Ableitungen erster Ordnung, 9 verschiedene partielle Ableitungen zweiter Ordnung und 27 verschiedene partielle Ableitungen dritter Ordnung

- √ ◯ 3 verschiedene partielle Ableitungen erster Ordnung, 6 verschiedene partielle Ableitungen zweiter Ordnung und 10 verschiedene partielle Ableitungen dritter Ordnung

- ◯ 1 partielle Ableitungen erster Ordnung, 1 partielle Ableitungen zweiter Ordnung und 1 partielle Ableitungen dritter Ordnung

- ◯ 3 verschiedene partielle Ableitungen erster Ordnung, 6 verschiedene partielle Ableitungen zweiter Ordnung und 12 verschiedene partielle Ableitungen dritter Ordnung

Laut dem Satz von Clairaut-Schwarz kommutieren in diesem Fall die partiellen Ableitungen. Das Abzählen dieser Ableitungen wird somit ein kombinatorisches Problem, das man auch lösen kann indem man die partielle Ableitungen einfach alle auflistet. Wir betrachtren die Anzahl Möglichkeiten beim Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln und brauchen den Fall *eine Kombination mit Wiederholung*, dabei ist n die Anzahl Variablen, also 3, und k die k. partielle Ableitung. Die Formel ist in diesem Fall $\binom{n+k-1}{k}$ D.h. es gibt $\binom{3+1-1}{1} = 3$ partielle Ableitungen 1.Ordnung, $\binom{3+2-1}{2} = 6$ partielle Ableitungen 2.Ordnung und $\binom{3+3-1}{3} = 10$ partielle Ableitungen 3.Ordnung.

Frage 5

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\sqrt{xy}) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

- ◯ Stimmt

- √ ◯ Stimmt nicht

Man berechne einfach diesen Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\sqrt{xy}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}\right) = \frac{1 \cdot 2\sqrt{xy} - x \cdot \frac{2y}{2\sqrt{xy}}}{4xy} = \frac{4xy - 2xy}{8(xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

Frage 6

Sie wollen den Flächeninhalt eines langen, schmalen Rechtecks aus Messwerten für seine Länge und Breite bestimmen. Welches der beiden Masse sollen Sie besonders sorgfältig bestimmen?

○ Die Länge

√ ○ Die Breit

Die Fläche ist gegeben durch die Formel $A = l \cdot b$ und somit ist das totale Differential $\mathrm{d}A = l \cdot \mathrm{d}b + b \cdot \mathrm{d}l$. Da den Messfehler bei der Breite $\mathrm{d}b$ mit dem viel grösseren Faktor l multipliziert wird, soll man hier besonders sorgfältig vorgehen.

Frage 7

Die Aussage: "Die Kurve beschrieben durch

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 2(x^2 + y^2) = 0$$

kann in der Nähe vom Punkt $P = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ nicht beschrieben werden durch eine Funktion $y = \phi(x)$"

√ ○ ist richtig

○ ist falsch

Man sollte zuerst überprüfen, dass der Punkt P tatsächlich auf der Kurve liegt. Dies stimtm! Dann ist noch die partielle Ableitung nach y von der durch die Kurve definierte Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x)^2 - 2(x^2 + y^2)$ zu bestimmen und zu überprüfen, ob diese im Punkt P verschwindet. Wenn dies so ist, so existiert nach dem Satz über implizite Funktionen so eine Funktion ϕ nicht. Also

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \cdot 2y \cdot (x^2 + y^2 - 2x) - 2 \cdot 2y = 4y \cdot (x^2 + y^2 - 2x - 1)$$

und somit gilt in P

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{7}{16} + \frac{2}{4} - 1\right) = 0$$

und damit stimmt die Aussage.

Frage 8

Die Aussage: "Sei $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10$ so gilt $\nabla f(x, y) = 2x + 2y$"

- ◯ ist richtig
- √ ◯ ist falsch

Die Definion des Gradienten ist

$$\nabla f(x, y) := \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

also ist die Aussage falsch. Richtig wäre

$$\nabla f(x, y) := \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Frage 9

Die Aussage: "Sei $f(x, y, z) = 4$ so gilt $\nabla f(x, y, z,) = \vec{0}$"

- √ ◯ ist richtig
- ◯ ist falsch

Der Gradient wird gebildet aus den partiellen Ableitungen, diese sind alle gleich Null für eine konstante Funktion und somit ist der Gradient der Nullvektor.

Frage 10

Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

○ der minimimalen partiellen Ableitung

○ entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung

○ des Gradienten

√ ○ entgegengesetzt zum Gradienten

○ orthogonal zum Gradienten

Die erste zwei Antworte sind offensichtlich falsch, da die partielle Ableitungen ihre Werte in $\mathbb{R}$ nehmen und somit keine Richtung darstellen können. Mit Hilfe der Richtungsableitung ($\vec{u}$ ist ein Einheitsvektor, $\phi = \angle(\nabla f(x, y), \vec{u})$)

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} = |\nabla f(x, y)||\vec{u}| \cos \phi = |\nabla f(x, y)| \cos \phi$$

erhalten wir folgende Ungleichung

$$-|\nabla f(x, y)| \leq D_{\vec{u}} f(x, y) \leq |\nabla f(x, y)|$$

mit Gleichheit beim ersten Ungleichheitszeichen wenn $\phi = \pi$. D.h. der Winkel zwischen $\vec{u}$ und den Gradienten $\nabla f(x, y)$ ist π also zeigt $\vec{u}$ in Richtung entgegengesetzt zum Gradienten. Man bemerke, dass orthogonal das Fremdwort für senkrecht ist und somit ist diese Antwort auch falsch.

Frage 11

Die Aussage: "Sei $f : G \to \mathbb{R}$ mit $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion mit einem Extremum an der Stelle (a, b), so ist (a, b) ein kritischer Punkt von f"

○ ist richtig

√ ○ ist falsch

Vergessen Sie nicht, dass auch nicht differenzierbare Funktionen Extrema haben können. Stellen Sie sich der Graph von f vor als das Dach eines Kirchenturms. Dann hat diese Funktion ein klares Maximum (die Turmspitze), da die Funktion hier aber nicht differenzierbar ist, kann man nicht von partiellen Ableitungen sprechen und damit auch nicht von kritischen Punkten.

Frage 12

Die Aussage: "Sei (a, b) ein kritischer Punkt der Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $G \subset \mathbb{R}^2$, so hat f an der Stelle (a, b) ein Extremum."

- ◯ ist richtig
- √ ◯ ist falsch

Wir haben ein Gegenbeispiel in der Vorlesung gesehen: $f(x, y) = y^2 - x^2$ hat einen kritischen Punkt bei $(0, 0)$, da aber $f(x, 0) = -x^2 \leq f(0, 0) = 0$ kann es sich nicht um ein Mimimum handeln, und da $f(0, y) = y^2 \geq f(0, 0) = 0$ kann es sich auch nicht um ein Maximum handeln, also wir haben hier kein Extremum (sondern ein Sattelpunkt).

Frage 13

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere die Funktion g durch

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) := c \cdot f(x, y)$$

Welche Aussagen sind richtig?

- √ ◯ Falls (a, b) ein lokales Extremum von f ist, so auch von g.
- ◯ Falls (a, b) ein lokales Extremum von g ist, so auch von f.
- ◯ Falls (a, b) ein lokales Maximum von f ist, so auch von g.

O.B.d.A. kann man annehmen, dass (a, b) ein lokales Maximum von f ist. Dies heisst nach der Definition, dass für alle (x, y) "in der Nähe" von (a, b) gilt

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

Wenn man nun mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ multipliziert dann passiert eines der drei folgenden Szenarien

$$\text{Falls}\, c > 0 : \ c \cdot f(x, y) \leq c \cdot f(a, b) \iff g(x, y) \leq g(a, b)$$

also ist (a, b) auch ein lokales Maximum von g.

$$\text{Falls}\, c < 0 : \ c \cdot f(x, y) \geq c \cdot f(a, b) \iff g(x, y) \geq g(a, b)$$

also ist (a, b) ein lokales Minimum von g und somit noch immer ein lokales Extremum aber die dritte Aussage ist falsch.

$$\text{Falls}\, c = 0 : \ c \cdot f(x, y) \leq c \cdot f(a, b) \iff 0 = g(x, y) \leq 0 = g(a, b)$$

also ist (a, b) noch immer ein lokales Extremum von g, damit ist die erste Aussgae richtig. Andersum gilt aber, wenn $f(x, y)$ irgendeine Funktion ist und $g(x, y) \equiv 0$, dass alle Punkte Extremalpunkte von g sind, was überhaupt nicht heissen soll, dass sie auch Extremalpunkte von f sind (Gegenbeispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $c = 0$). Damit ist die zweite Aussage falsch.

Frage 14

Die Aussage: "Sei eine differenzierbare Funktion. (x_0, y_0, z_0) ist ein kritischer Punkt von f und die Hesse-Matrix hat hier drei negative Eigenwerte, so hat die Funktion f ein lokales Minimum."

◯ ist richtig

√ ◯ ist falsch

Das Taylorpolynom zweiten Grades ist an der Stelle (x_0, y_0, z_0) gegeben durch

$$T_2(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)H_f(x_0,y_0,z_0)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)^T$$

Wenn man nun H_f diagonalisiert so kann man dies umschreiben als

$$T_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{2}\left(\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2\right)$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind. Sind diese Eigenwerte nun negativ so gilt für das Taylorpolynom in der Nähe von (x_0, y_0, z_0)

$$T_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{2}\left(\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2\right) < f(x_0,y_0,z_0).$$

Da das Taylorpolynom hier eine gute Approximation für die Funktion ist (überlegen Sie selber wieso!), hat f also ein Maximum an der Stelle (x_0, y_0, z_0).

Frage 15

Mit Hilfe der Methode der Lagrange Multiplikatoren findet man, dass die Funktion $f(x,y) = e^{-xy}$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 \leq 1$ als mögliches Maximum die Werte $1, e^{-\frac{1}{4}}$ und $e^{\frac{1}{4}}$ annimt. Welche ist das Maximum?

◯ 1

◯ $e^{-\frac{1}{4}}$

√ ◯ $e^{\frac{1}{4}}$

Beachte zuerst dass diese Aufgabe **absolut elementar** ist. Entweder überlegt man sich dass die Exponentialfunktion monoton wächst (die Ableitung ist immer positiv, $\frac{d}{dx}e^x = e^x > 0$) und deshalb gilt $e^{-\frac{1}{4}} < e^0 = 1 < e^{\frac{1}{4}}$. Oder wenn man weiss, dass e grösser als 2 und damit als 1 ist, soll auch die 4.Wurzel aus e ($\sqrt[4]{e} = e^{\frac{1}{4}}$) grösser als 1 sein. Und somit ist der Kehrwert, $e^{-\frac{1}{4}}$, natürlich kleiner als 1.

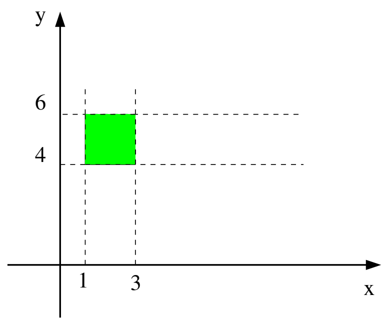
Frage 16

Die Aussage: "Das Gebiet worber integriert wird beim Integral $\int_4^6 \int_1^3 4\,dxdy$ ist ein Quadrat."

√ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Die Intervalle auf der x- und y-Achse worüber man integriert haben beide Länge 2 $(6-4=3-1=2)$ also ist das Gebiet ein Quadrat – siehe Figur:



Frage 17

Die Aussage: "Wenn f eine stetige Funktion ist so gilt"

$$\int_4^6 \int_1^3 f(x,y)\,dxdy = \int_4^6 \int_1^3 f(x,y)\,dydx$$

◯ stimmt

√ ◯ stimmt nicht

Man hat hier die Integrationsreihenfolge geändert, aber die Integrationsgrenzen nicht mitvertauscht. Man integriert nun also über ein anderes Gebiet und das muss nicht unbedingt das gleiche Resultat geben.

Frage 18

Die Aussage: "Wenn f eine stetige Funktion ist so gilt"

$$\int_4^6 \int_1^3 f(x,y)\,dxdy = \int_1^3 \int_4^6 f(x,y)\,dydx$$

√ ◯ stimmt

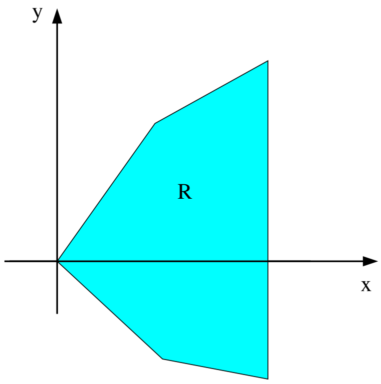
◯ stimmt nicht

Dies ist der Satz von Fubini korrekt angewendet.

Frage 19

Die Aussage: "Das Doppelintegral über R – siehe Abbildung – kann man auf folgenden beiden Arten berechnen"

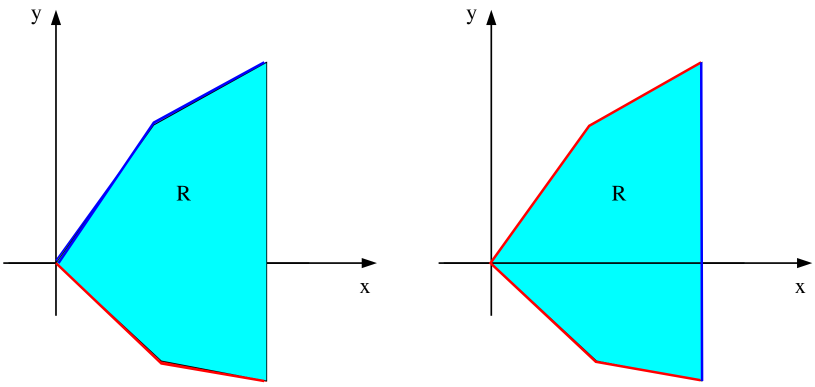
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dxdy$$



√ ○ stimmt

○ stimmt nicht

Die linke Figur zeigt, dass der Funktionsgraph von $g(x)$ in rot gegeben ist und der von $h(x)$ in blau. Und die zweite Figur zeigt, dass der Funktionsgraph von $\phi(y)$ in rot gegeben ist und der von $\psi(y)$ in blau.



Frage 20

Die Aussage: "Sei R die Einheitskreisscheibe mit Mittelpunkt der Ursprung so gilt"

$$\iint_R x^2 + y^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \, dr d\phi$$

◯ stimmt

√ ◯ stimmt nicht

Wenn man von kartesischen auf Polarkoordinaten wechselt, sollte man drei Sachen beachten:

- Man soll die Grenzen anpassen
- Man soll das Flächenelement anpassen
- Man soll die Funktion in den neuen Koordinaten umschreiben

In diesem Fall sind die Grenzen korrekt angepasst, und auch die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ lautet in Polarkoordinaten $\tilde{f}(r, \phi) = r^2$, aber das polare Flächenelement ist gegeben durch $dA = r dr d\phi$, es fehlt hier also der Faktor r, korrekt wäre

$$\iint_R x^2 + y^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr d\phi$$

Frage 21

Die Aussage: "Der Durchschnittsdistanz aller Punkte einer Kreisscheibe mit Radius R vom Mittelpunkt ist $\frac{3}{4}R$."

◯ stimmt

√ ◯ stimmt nicht

Der Durchschnittsdistanz ist definiert durch

$$\frac{\iint_R r \, dA}{\iint_R \, dA}$$

wobei der Nenner nichts anders ist als die Fläche der Region R also in diesem Fall πR^2. Der Zähler ergibt

$$\iint_R r \, dA = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r \cdot r \, dr d\phi = \frac{2}{3}\pi R^3$$

und somit ist der Durchschnittsdistanz

$$\frac{\iint_R r \, dA}{\iint_R \, dA} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2} = \frac{2}{3}R$$

Frage 22

Die Aussage: "Das 3-fache Integral über den Quader

$$D = \{(x, y, z) \,|\, a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$$

lässt sich auf 8 verschiedene Arten durch ein iteriertes Integral berechnen"

○ stimmt

√ ○ stimmt nicht

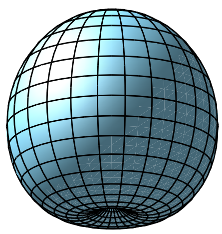
Nach dem Satz von Fubini lässt sich ein Integral über ein Quader als iteriertes Integral berechnen

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? f(x, y, z)\, d?d?d?$$

dabei ist noch die Reihenfolge der Integration zu bestimmen. Da wir hier drei Variablen ordnen müssen, gibt es dafür $3! = 6$ Möglichkeiten.

Frage 23

Das Volumen des Rotationskörpers (Kardioide)



beschrieben durch

$$K = \{(r, \phi, \theta) \,|\, 0 \le \theta \le \pi, -\pi \le \phi \le \pi, 0 \le r \le 1 + \cos\theta\}$$

lässt sich durch folgendes Integral berechnen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \tag{1}$$

√ ○ stimmt

○ stimmt nicht

Die Aussage stimmt da sowohl die Integrationsgrenzen wie das Volumenelement richtig gesetzt wurden.

Frage 24

Die Aussage: “Das Volumen der Kardioide aus der letzten Frage ist kleiner als das Volumen der Einheitskugel.”

○ stimmt

√ ○ stimmt nicht

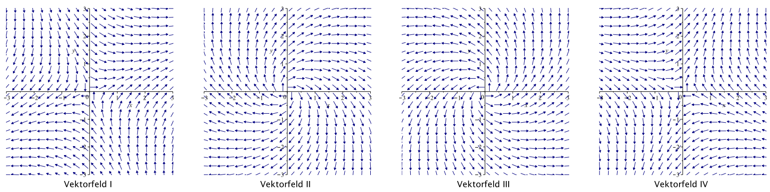
Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4}{3}\pi$. Wir berechnen nun das Kardioide-Volumen

$$(1) = 2\pi \int_0^\pi \frac{(1+\cos\theta)^3}{3} \sin\theta \, d\theta = 2\pi \left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{3 \cdot 4} \right]_0^\pi = \frac{32\pi}{12} = \frac{8\pi}{3}$$

dies ist das doppelte des Kugelvolumens.

Frage 25

Welche der folgenden vier Abbildungen stellt das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = \binom{x+y}{y-x}$ dar?



○ Vektorfeld I

√ ○ Vektorfeld II

○ Vektorfeld III

○ Vektorfeld IV

Es gibt verschiedene Arten diese Aufgabe zu beantworten. Z.B. betrachte die Koordinatenachsen: Auf der y-Achse gilt $x = 0$ und somit erhalten wir das Vektorfeld $\binom{y}{y}$, das auf der positiven y-Achse nach rechts oben und auf der negativen y-Achse nach links unten zeigt. Dies wird nur erfüllt durch das 2. und 4.Vektorfeld. Betrachte nun die x-Achse. Hier ist das Vektorfeld $\binom{x}{-x}$ und zeigt somit auf der positven x-Achse nach rechts unten und auf der negativen x-Achse nach links oben. Somit ist nur noch das Vektorfeld II möglich und deshalb die richtige Antwort.

Frage 26

Betrachte eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^3$ mit zwei verschiedenen Parametrisierungen

$$r_1 : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad r_1(I) = C$$

$$r_2 : J = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad r_2(J) = C$$

o.B.d.A. nehmen wir an, dass $r_1(a) = r_2(\alpha)$ und dass $r_1'(t) \neq \vec{0} \, \forall t \in I$ und $r_2'(\tau) \neq \vec{0} \, \forall \tau \in J$. So gilt $\forall \tau \in J \, \exists t \in I$ mit $r_2(\tau) = r_1(t)$.

√ ○ diese Aussage stimmt

○ diese Aussage stimmt nicht

Die Voraussetzungen an die Parametrisierungen garantieren, dass sie beide C in die gleiche Richtung durchlaufen, nie anhalten und nicht umkehren also sind es bijektive Abbildung von I resp. J nach C und damit sind auch die Umkehrabbildungen und die Verknüpfungen solcher Abbildungen wieder bijektiv und somit ist die Aussage richtig.

Frage 27

Das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z,) = (f(x), g(y), h(z))$ für $(x, y, z,) \in \mathbb{R}^3$ ist konservativ.

√ ○ stimmt

○ richtig

Wir wissen aus Satz A, dass ein Vektorfeld konservativ ist, wenn die drei Gleichungen die der Rotation entsprechen erfüllt sind. Das ist hier der Fall (man leitet nie eine Komponente nach der entsprechenden Variable ab, also sind alle partielle Ableitungen die man braucht Null)

Frage 28

Betrachte das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = (2x, -y)$ und die Ellipse E mit Halbachsen 2 und 3 und Mittelpunkt $(3, 2)$ orientiert im Gegenuhrzeigersinn, so gilt

$$\oint_E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

√ ○ stimmt

○ stimmt nicht

Die Kombination der Sätze A und B sagt uns dass das Umlaufintegral eines konservativen Vektorfeldes immer Null ist und dass ein Vektorfeld konservativ ist, wenn die 2-dimensionale Rotation verschwindet. In diesem Fall haben wir

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

und damit sind die Voraussetzungen erfüllt und stimmt die Aussage.

Frage 29

Das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ hat keine Zirkulation entlang und keinen Fluss durch den Einheitskreis.

√ ○ stimmt

○ stimmt nicht

Die 2-dimensionale Rotation dieses Vektorfeldes ist gegeben durch

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

Mit dem Satz von Green I bedeutet dies dass die Zirkulation immer Null ist für jede geschlossene Kurve C, also insbesondere für den Einheitskreis. Die 2-dimensionale Divergenz dieses Vektorfeldes ist gegeben durch

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Mit dem Satz von Green II bedeutet dies dass der Fluss immer Null ist für jede geschlossene Kurve C, also insbesondere für den Einheitskreis.

Frage 30

Für jedes zwei-dimensionale Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y)$ gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(2x, 2y) = 4 \cdot \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)$$

○ stimmt

√ ○ stimmt nicht

Dies stimmt nicht und ist nonsense - ein Gegenbeispiel wäre das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = (x, 0)$.

Frage 31

Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Rotation Null.

○ stimmt

√ ○ stimmt nicht

Dies lässt sich beweisen indem man ein Gegenbeispiel konstruiert. Betrachte das zu der z-Achse parallele Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z,) = (0, 0, f(x))$ für irgendeine nicht-triviale Funktion, so hat dies Rotation $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, -f'(x), 0)$ was nicht gleich ist zum Nullvektor. Beachte also, dass die Rotation schon auf ein Art die Rolle von Ableitung übernimmt dass aber die Eigenschaften über Ableitungen nicht direkt anzuwenden sind auf die Rotation.

Frage 32

Aussage 1: Für die Fläche S_1 und eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$S_1 = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 10\}$$

gilt

$$\iint_{S_1} f \, dS = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, 10) \, dxdy$$

Aussage 2: Für die Fläche S_2 und eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$S_2 = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = x\}$$

gilt

$$\iint_{S_2} f \, dS = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, x) \, dxdy$$

- ◯ Beide Aussagen stimmen
- √ ◯ Aussage 1 ist richtig und Aussage 2 ist falsch
- ◯ Aussage 1 ist falsch und Aussage 2 ist richtig
- ◯ Beide Aussagen sind falsch

Beide Flächen können aufgefasst werden als Funktionsgraphen ($g(x, y) = 10$ und $g(x, y) = x$) für welche wir aus der Vorlesung wissen, dass

$$\iint_S f \, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x(x, y)^2 + g_y(x, y)^2} \, dA$$

In beiden Fällen ist das Definitionsgebiet der Funktion das Einheitsquadrat in der xy-Ebene also gilt $\iint_R = \int_0^1 \int_0^1$. Der Term $f(x, y, g(x, y))$ wird im ersten Fall zu $f(x, y, 10)$ und im zweiten Fall zu $f(x, y, x)$ also das ist auch in Ordnung. Der Wurzelterm wird im ersten Fall zu $\sqrt{1 + 0^2 + 0^2}$ und im zweiten Fall zu $\sqrt{1 + 1^2 + 0^2}$ und dies ist genau der Grund wieso die zweite Aussage falsch ist: Der Term $\sqrt{2}$ fehlt.

Frage 33

Sei $\mathbf{F}$ ein wirbelfreies Vektorfeld auf ein einfach-zusammenhängendes Gebiet D, so ist $\mathbf{F}$ konservativ.

- √ ◯ stimmt
- ◯ stimmt nicht

Wirbelfrei bedeutet, dass $\text{rot}\, \mathbf{F} = \vec{0}$ und wir haben in der Vorlesung gesehen (mit dem Satz von Stokes), dass dies äquivalent ist zu “$\mathbf{F}$ ist konservativ”.

Frage 34

Das Vektorfeld $\mathbf{F}$ ist definiert als Gradient der Funktion f mit

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot \sin(x + y) \cdot e^{z^2}$$

so gilt für das Flussintegral über die Oberfläche eines Ellipsoides E mit Halbachsen 1, 2 und 3

$$\iint_E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

○ stimmt

○ stimmt nicht

Diese Aufgabe macht so keinen Sinn - siehe korrigierte nächste Aufgabe. Man müsste hier entweder das Integral ausrechnen (nicht probiert) oder sicher sein, dass das Vektorfeld $\mathbf{F}$ als Rotation eines anderen Vektorfeldes zu schreiben ist. Dann wäre nämlich die Aussage richtig. Wie die Bedingung $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \vec{0}$ hinreichend ist um zu garantieren, dass das Vektorfeld $\mathbf{F}$ ein Potential hat, so ist die entsprechende Bedingung um zu garantieren, dass $\mathbf{F}$ als Rotation von einem anderen Vektorfeld geschrieben werden kann: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ (ohne Beweis). Dies gilt hier aber nicht, also bleibt nichts anderes als das Integral auszurechnen :-(

Frage 35

Das Vektorfeld $\mathbf{F}$ ist definiert als Gradient der Funktion f mit

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot \sin(x + y) \cdot e^{z^2}$$

so gilt für das Flussintegral über die Oberfläche eines Ellipsoides E mit Halbachsen 1, 2 und 3

$$\iint_E \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

√ ○ stimmt

○ falsch

Da $\mathbf{F} = \nabla f$ gilt $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \vec{0}$ und damit ist die Aussage klar.

Frage 36

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und definiere das Vektorfeld $\mathbf{F}$ durch $\mathbf{F} = \nabla f$. Betrachte die beide Aussagen:

$$\text{Aussage1} : \operatorname{rot} \mathbf{F} = \vec{0}$$

$$\text{Aussage2} : \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

- ◯ Beide Aussagen stimmen
- √ ◯ Aussage 1 stimmt und Aussage 2 ist falsch
- ◯ Aussage 2 stimmt und Aussage 1 ist falsch
- ◯ Beide Aussagen sind falsch

Aussage 1 folgt aus der Theorie in der Vorlesung, dass konservative Vektorfelder wirbelfrei sind und lässt sich leicht nachrechnen (Satz von Clairaut-Schwarz). Für die zweite Aussage gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$$

Dies ist nicht wahr für jede beliebige Funktion auf $\mathbb{R}^3$. Diese Summe der reinen zweiten Ableitungen wird auch mit Δf abgekürzt und der Laplace Operator angewendet auf f genannt. Funktionen mit der Eigenschaft $\Delta f = 0$ nennt man harmonische Funktionen und darüber könnte man eine eigene Vorlesung halten.

Frage 37

Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, mit $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in D$ so gilt

$$\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \partial D$$

wobei $\mathbf{n}$ ein nach aussen zeigender Normalvektor ist.

- ◯ stimmt
- √ ◯ stimmt nicht

Aus dem Satz von Gauss folgt zwar

$$0 = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

dies bedeutet aber nur dass der Gesamt-Nettofluss über die Oberfläche ∂D Null ist, nicht aber dass der Integrand punktweise verschwindet, oder anders gesagt dass das Skalarprodukt überall Null ist.

Frage 38

Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld auf dem einfachzusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $|\mathbf{F}(x, y, z)| < 1$ für alle $(x, y, z) \in D$ so gilt

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV < \text{Flächeninhalt} \, (\partial D)$$

√ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Aus dem Satz von Gauss folgt

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dA$$

Nun gilt für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$ und somit die folgende Ungleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$. Inbesondere bedeutet dies in unserem Fall

$$\begin{aligned}
\iint_R \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dA &\leq \iint_R |\mathbf{F}(r(u, v))||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA \\
&< \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA \\
&= \text{Flächeninhalt}(\partial D)
\end{aligned}$$

Frage 39

Die untenstehende Differentialgleichung ist separierbar

$$y'(x) = x + x \cdot y'(x)$$

√ ◯ Das stimmt

◯ Das stimmt nicht

Beachte, dass man die rechte Seite der Gleichung auch schreiben kann als $x \cdot (1 + y'(x))$ und damit hat man die Gleichung separiert als Produkt einer Funktion von x ($g(x) = x$) und einer Funktion von y ($h(y) = 1 + y$)

Frage 40

Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear (mehrere Antworte) möglich

- ○ $y = xy' + (y')^2$
- √ ○ $\frac{y'}{1-x^2} + \frac{y}{1+x} = \frac{1}{x^2}$
- ○ $(y' - 2)^2 = y$
- ○ $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

Beachte, dass alle DGLen 1.Ordnung sind. Nach Definition hat eine lineare DGL 1.Ordnung folgende Form

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

für irgendwelche Funktionen p und q von x, insbesondere kommen sowohl die gesuchte Funktion wie auch ihre Ableitung nur in der ersten Potenz vor (deshalb sind die erste und dritte Option falsch). Bei der letzten Option ist es klar, dass es nicht möglich ist die rechte Hand der Gleichung in der Form $\frac{2xy}{x^2-y^2}$ umzuschreiben und damit ist auch dies nicht linear. Bei der 2.Option müsste man zuerst die DGL mit $(1 - x^2)$ multiplizieren, dann wären $p(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$ und $q(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ und somit ist die DGL linear.

Frage 41

Betrachte die beide Anfangswertprobleme

$$(\text{AWP1}) : x \cdot y'(x) = 2y(x)\,\text{und}\,y(0) = 0$$

$$(\text{AWP2}) : x \cdot y'(x) = 2y(x)\,\text{und}\,y(1) = 1$$

- ◯ Sowohl (AWP1) wie auch (AWP2) hat lokal eine eindeutige Lösung.
- ◯ Nur das (AWP1) hat lokal eine eindeutige Lösung.
- √ ◯ Nur das (AWP2) hat lokal eine eindeutige Lösung.
- ◯ Für beide Anfangswertprobleme existiert nicht mal lokal eine eindeutige Lösung.

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass die Lipschitz-Stetigkeit eine Rolle spielt im Satz von Picard-Lindelöf (Existenz und Eindeutigkeit für Differentialgleichungen 1.Ordnung). Wir müssen diesen Begriff noch etwas genauer unter die Luppe nehmen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **Lipschitz-stetig**, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Eine Abschwächung ist die lokale Lipschitz-stetigkeit: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst **lokal Lipschitz-stetig**, wenn es für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Intervall $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gibt, so dass die Einschränkungvon f auf dieses Intervall Lipschitz-stetig ist. Die lokale Version von Picard-Lindelöf sagt, dass jedes Anfangswertproblem zu der Differentialgleichung $y'(x) = G(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ unter Voraussetzung der Lipschitz-Bedingung in einer gewissen Umgebung von x_0 eindeutig gelöst werden kann, dabei ist die Bedingung hier, dass G eine lokale Lipschitz-Bedingung in der zweiten Variable erfüllt, d.h. für jeden Punkt (x, y) gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$, auf der die Einschränkung von G die Lipschitz-Bedingung erfüllt d.h. es gibt dort eine Konstante L

$$|G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in U$$

In unserem Fall ist die Funktion $G(x, y) = \frac{2y}{x}$ und die Bedingung lautet

$$\left| \frac{2y_1}{x} - \frac{2y_2}{x} \right| = \left| \frac{2}{x} \right| |y_1 - y_2|$$

Für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ kann man so ein L finden (nämlich das Maximum von $\left|\frac{2}{x}\right|$ auf dieser Umgebung). Aber wenn $x = 0$, wird in der Nähe von $x = 0$ dieser Term beliebig gross und so ein L lässt sich nicht bestimmen, d.h. die Bedingung ist nicht erfüllt und die Eindeutigkeit nicht garantiert. Dies sieht man auch schnell wenn man die DGL löst (sie ist separierbar). Die Lösungen haben die Form $y(x) = cx^2$ und man sieht dass die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ von unendlich viele Funktionen dieser Form erfüllt wird.