Ein Beweis des Satzes von Stokes für einen Spezialfall

Satz von Stokes: *Sei S eine glatte orientierte Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit glattem geschlossenem Rand $C = \partial S$, dessen Orientierung konsistent ist mit derjenigen von S. Sei $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein Vektorfeld, dessen Komponenten stetige erste partielle Ableitungen haben auf S. So gilt*

$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

Wir werden diesen Satz beweisen für den Spezialfall, wo S gegeben ist als Funktionsgraph. Wir brauchen dabei die Zirkulationsvariante des Satzes von Green, d.h. Green I:

Satz von Green I: *Sei C eine einfache geschlossene glatte, im Gegenuhrzeigersinn orientierte Kurve, welche ein zusammenhängendes und einfach-zusammenhängendes Gebiet R in der Ebene begrenzt. Sei $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$ ein Vektorfeld mit stetigen ersten partiellen Ableitungen auf R. So gilt*

$$\begin{aligned}\oint\limits_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} &= \oint\limits_C (G_1(r(t)) \cdot x'(t) + G_2(r(t)) \cdot y'(t))\, dt \\ &= \iint\limits_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA.\end{aligned}$$

Beweis Spezialfall Stokes: Sei S der Graph der Funktion $z = f(x, y)$ definiert über einem Gebiet in der xy-Ebene. Sei $C = \partial S$ der Rand von S und seien R und C' die Projektionen von S und C auf der xy-Ebene. Orientiere C' im Gegenuhrzeigersinn und verwende dies auch als die Orientierung von C selber.

Sei C parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ so gilt (mit Hilfe der Kettenregel)

$$\mathbf{r}'(t) = \big(x'(t), y'(t), f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\big)$$

und somit lautet das Linienintegral im Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \oint\limits_C F_1(r(t)) \cdot x'(t) + F_2(r(t)) \cdot y'(t) \\
&\qquad + F_3(r(t)) \cdot \big(f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\big)\ dt \\
&= \oint\limits_C \left(F_1(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_x(x(t), y(t))\right) \cdot x'(t) \\
&\qquad + \left(F_2(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_y(x(t), y(t))\right) \cdot y'(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Dieses letzte Integral passt genau ins Setting des Satzes von Green, wobei

$$G_1(r(t)) = F_1(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_x(x(t), y(t)),$$

$$G_2(r(t)) = F_2(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_y(x(t), y(t)).$$

Beachte, dass aus der Kettenregel (und Produktregel) folgt, dass

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot f_y + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot f_y\right) \cdot f_x + F_3 \cdot f_{xy},$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot f_x + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot f_x\right) \cdot f_y + F_3 \cdot f_{yx}$$

und somit

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = -f_x \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - f_y \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + 1 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Also gilt nach Anwendung des Satzes von Green

$$\begin{aligned}
\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint\limits_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint\limits_R - f_x \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - f_y \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \qquad (1) \\
&\qquad + 1 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die andere Seite der Gleichung im Satz von Stokes: Verwende für die Fläche S folgende Parametrisierung

$$\mathbf{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)),$$

so sehen wir, dass Folgendes gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_R \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} dA.$$

was nach Ausmultiplizieren des Skalarprodukts genau der Gleichung (1) entspricht und damit ist dieser Spezialfall vom Satz bewiesen. ■