Serie 14

1. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der folgenden homogenen Differentialgleichungen. Falls zusätzlich Anfangsbedingungen angegeben sind, bestimmen Sie darüber hinaus die entsprechenden speziellen Lösungen.

a) $y'' + 2y' - 35y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 3$

b) $\frac{y''}{4} - 3y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

c) $y^{(4)} - 16y = 0$

d) $9y^{(4)} - 16y'' = 0$

2. Randwertprobleme. Im Gegensatz zu Anfangswertproblemen, wo man Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ vorgibt, sind bei Randwertproblemen Bedingungen für die Lösung am Rande des Ortsintervalls vorgeschrieben. Im Folgenden wollen wir als Beispiel dazu den eindimensionalen Fall der stationären Wärmeleitungsgleichung betrachten.

Wir nehmen an, dass ein homogener Draht der Länge $L = 10$ durch eine Heizung $q(x)$ auf zeitlich konstanter, aber örtlich variabler Temperatur $u(x)$ gehalten wird. Die Wärme kann sich einerseits in Drahtrichtung ausgleichen, andererseits wird die Wärme $\gamma u(x)$ an die Umgebung abgestrahlt. Dann genügen die Grössen folgender Gleichung

$$k\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} - \gamma u(x) + q(x) = 0,$$

wobei die Konstante k vom Material des Drahtes abhängt. Wir nehmen im folgenden $k = 1$ an.

a) Der Draht sei vollständig isoliert ($\gamma = 0$) und wird auf dem Bereich $[3, 7]$ mit einer konstanten Leistung $q(x) = 5$ erhitzt. Die beiden Enden haben Umgebungstemparatur $u(0) = u(10) = 20$. Berechnen Sie die Temparaturverteilung $u(x)$.

b) Der Draht strahlt gleichmässig Wärme ab ($\gamma = 4$) und werde durch eine Heizung mit $q(x) = \cos(x)$ erhitzt. Die beiden Drahtenden seien isoliert ($u'(0) = u'(10) = 0$). Berechnen Sie die Temparaturverteilung $u(x)$.

Bitte wenden!

3. **Potenzreihenansatz.** Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

   a) Finden Sie die allgemeine Lösung von $y''(x) = y(x)$.

   b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $$(1-x)^2 y''(x) - (1-x)y'(x) - y(x) = 0$$

   für $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

4. **Prüfungsaufgabe 3, Sommer 2014.** Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

   $$y^{(4)}(x) - y'(x) = 0,$$

   wobei $y^{(4)}(x)$ die vierte Ableitung von y nach x bezeichnet und bestimmen Sie daraus alle Lösungen, welche

   $$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

   erfüllen.

5. **Online-Abgabe**

   1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung

   $$y''' + 2y' + y = x^2 + 5?$$

   (a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

   (b) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = x^2 + 5$

   (c) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

   (d) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

   (e) $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$

Siehe nächstes Blatt!

2. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$ für eine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung sowie eine Konstante α.

(d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

3. Welche der gegebenen Zahlen ist für die Lösung $y(x)$ des Anfangwertproblems

$$x \cdot y'(x) - y(x) = x, \quad y(1) = 1$$

die beste Approximation von $y(2)$?

(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) 7

4. Bestimmen Sie die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 3e^{2x}.$$

(a) $C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + 3e^{2x}$

(b) $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \sin x + axe^{2x}$

(c) $C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3e^{2x}$

(d) $C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{3}{2} e^{2x}$

Bitte wenden!

5. Es sei bekannt, dass $y(x) = e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + ky(x) = 0$$

ist. Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$.

(a) -14

(b) -6

(c) -4

(d) 6

6. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 0?$$

(a) $Ae^{2x} + Be^{5x}$

(b) $Ae^{2x} + Be^{-5x}$

(c) $Ae^{-2x} + Be^{5x}$

(d) $Ae^{-2x} + Be^{-5x}$

7. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' - 7y = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind 0 und 7.

(b) Diese Differentialgleichung hat keine charakteristische Gleichung.

(c) Die charakteristische Gleichung hat $\sqrt{7}$ als doppelte Nullstelle.

(d) Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind $\pm\sqrt{7}$.

Siehe nächstes Blatt!

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x}{1+x}\, y(x) = 1 + x.$$

(a) $1 + x + C$

(b) $C(1 + x)$

(c) $(1 + Ce^{-x})(1 + x)$

(d) $e^{-x}(x + \frac{x^2}{2} + C)(1 + x)$

9. Zwischenprüfung Winter 2014. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0.05W - 200$$

lautet . . .

(a) $W(t) = Ae^t + 4000$ für $A \in \mathbb{R}$.

(b) $W(t) = Ae^{-10t}$ für $A \in \mathbb{R}$.

(c) $W(t) = \frac{Ae^{0.05t}}{0.05}$ für $A \in \mathbb{R}$.

(d) $W(t) = Ae^{0.05t} + 4000$ für $A \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

10. Zwischenprüfung Winter 2014. Bestimmen Sie die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 16y(x) = e^{3x}.$$

(a) $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{25}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{5}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(d) $y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{4x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(e) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Kurzlösungen: 1.a $y(x) = e^{-7x} + 2e^{5x}$; 1.b $y(x) = 2\,e^{6x} - 12\,xe^{6x}$; 1.c $y(x) = \tilde{A}\cosh(2x) + \tilde{B}\sinh(2x) + \tilde{C}\cos(2x) + \tilde{D}\sin(2x)$ 1.d $y(x) = A + Bx + Ce^{-\frac{4}{3}x} + De^{\frac{4}{3}x}$ 2.b $u(x) = \frac{1}{5}\cos(x) + 2A\cosh(2x) = 0.2\cos(x) - 2.24 \cdot 10^{-10}\cosh(2x)$; 3.a $y(x) = a_0\cosh(x) + a_1\sinh(x)$; 3.b $y(x) = 2 + \frac{x^2}{1-x}$; 4. $y(x) = 2 - e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$.

Keine Abgabe.

Wir wünschen Ihnen einen schönen Sommer und viel Erfolg bei den Prüfungen!