

Analysis II für D-ITET

Zusammenfassung

ETH Zürich Frühjahrssemester 2014

Prof. Richard Pink¹

26. Mai 2014

¹Dept. of Mathematics, ETH Zürich, CH-8092 Zürich, pink@math.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	4
1 Weitere Grundbegriffe	5
1.11 Matrizen	5
1.12 Skalar- und Vektorprodukt	6
1.13 Koordinatensysteme	7
8 Gewöhnliche Differentialgleichungen	9
8.1 Begriffsbestimmung	9
8.2 Existenz und Eindeutigkeit	10
8.3 Potenzreihenlösungen	12
8.4 Separierbare Differentialgleichungen	13
8.5 Lineare Differentialgleichungen	14
8.6 Konstante Koeffizienten	16
8.7 Systeme von Differentialgleichungen	19
8.8 Anwendung: Mehrkörperproblem	21
9 Differentialrechnung mehrerer Variablen	24
9.1 Erste Ableitung	24
9.2 Kettenregel	26
9.3 Einfache Anwendungen	26
9.4 Ableiten unter dem Integral	28
9.5 Höhere Ableitungen	29
9.6 Taylorentwicklung	30
9.7 Lokale Extrema	31
9.8 Globale Extrema	32
9.9 Implizite Funktionen	32
9.10 Extrema mit Nebenbedingungen	34
9.11 Vektorwertige Funktionen	35
9.12 Invertierbare Funktionen	37
10 Integralrechnung mehrerer Variablen	39
10.1 Mehrdimensionales Riemann-Integral	39
10.2 Eigenschaften	40
10.3 Substitution	42
10.4 Rotationskörper	43
10.5 Anwendung: Physikalische Grössen	45
10.6 Uneigentliches Integral	46
10.7 Kurvenintegral	47
10.8 Flächenintegral	49

11 Vektoranalysis	52
11.1 Vektorfelder	52
11.2 Potentiale	54
11.3 Vektorielltes Kurvenintegral	55
11.4 Integralsatz von Green im \mathbb{R}^2	57
11.5 Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^2	61
11.6 Vektorielltes Flachenintegral	62
11.7 Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^3	63
11.8 Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3	65

Vorbemerkung

Siehe die Zusammenfassung der Vorlesung Analysis I aus dem Herbstsemester 2013. Die Numerierung schliesst sich an die dortige an. Für alle Verbesserungsvorschläge bin ich dankbar.

Ich bedanke mich bei allen Teilnehmern für die gute Atmosphäre und wünsche Ihnen viel Erfolg.

Richard Pink

1 Weitere Grundbegriffe

1.11 Matrizen

Verschiedene mit Matrizen verbundene Begriffe wurden in der Vorlesung Lineare Algebra behandelt. Zur Erinnerung: Eine $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Schema von Zahlen bestehend aus m Zeilen und n Spalten der Form

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Ihre *Transponierte* ist die $n \times m$ -Matrix

$$A^T := (a_{j,i})_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Das *Produkt* einer $\ell \times m$ -Matrix $A = (a_{i,j})$ mit einer $m \times n$ -Matrix $B = (b_{j,k})$ ist die $\ell \times n$ -Matrix

$$AB := A \cdot B := (a_{i,1}b_{1,k} + \cdots + a_{i,m}b_{m,k})_{\substack{i=1..l \\ k=1..n}}.$$

Das Matrixprodukt ist linear in jedem Faktor und assoziativ, aber nicht kommutativ, und es erfüllt die Gleichung

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T.$$

Eine Matrix mit allen Einträgen 0 heisst eine *Nullmatrix*. Die $n \times n$ -Matrix I_n mit allen Diagonaleinträgen 1 und allen übrigen Einträgen 0 heisst *Einheitsmatrix*. Sie ist ein neutrales Element der Multiplikation in dem Sinn, dass für jede $m \times n$ -Matrix A gilt

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

Eine $n \times n$ -Matrix A heisst *invertierbar*, falls eine $n \times n$ -Matrix A^{-1} existiert mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Die Matrix A^{-1} ist dann eindeutig bestimmt und heisst die *Inverse von A*.

Der *Rang* einer Matrix ist gleichzeitig die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten und die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Der Rang einer $m \times n$ -Matrix ist daher $\leq \min\{m, n\}$. Eine Matrix ist die Nullmatrix genau dann, wenn ihr Rang gleich 0 ist. Eine $n \times n$ -Matrix ist invertierbar genau dann, wenn ihr Rang gleich n ist.

Eine $1 \times n$ -Matrix heisst ein *Zeilenvektor der Länge n* , und eine $n \times 1$ -Matrix heisst ein *Spaltenvektor der Länge n* . Für jeden Zeilenvektor v ist v^T ein Spaltenvektor und umgekehrt.

Für die Begriffe *Determinante*, *charakteristisches Polynom*, *Eigenwert* und *Eigenvektor* einer quadratischen Matrix siehe die Vorlesung Lineare Algebra.

Eine Matrix A , die gleich ihrer Transponierten ist, heisst *symmetrisch*. Eine symmetrische $n \times n$ -Matrix mit reellen Koeffizienten A heisst

- *positiv* oder *positiv definit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^T A x > 0$,
- *negativ* oder *negativ definit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^T A x < 0$,
- *semipositiv* oder *positiv semidefinit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^T A x \geq 0$,
- *seminegativ* oder *negativ semidefinit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^T A x \leq 0$,
- *indefinit* sonst,

wobei x stets einen Spaltenvektor darstellt. Den jeweiligen Fall kann man an den Vorzeichen der Eigenwerte erkennen.

1.12 Skalar- und Vektorprodukt

Wie bisher sei \mathbb{R}^n der Standard-Vektorraum der Dimension n mit dem euklidischen Absolutbetrag $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Solange es nicht darauf ankommt, schreiben wir seine Elemente einfachheitshalber als Zeilenvektoren.

Definition: Das (*euklidische*) *Skalarprodukt* zweier Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Mit dem Matrixprodukt können wir sie auch schreiben in der Form $x \cdot y^T$. In der Vektoranalysis schreibt man oft ganz kurz $x \cdot y := \langle x, y \rangle$.

Eigenschaften: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= |x|^2, \\ \lambda \langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle, \\ \langle y, x \rangle &= \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Definition: Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$ heisst ein *Einheitsvektor* und gibt eine *Richtung* im \mathbb{R}^n an.

Fakt: Jeder von Null verschiedene Vektor x ist ein positives Vielfaches eines Einheitsvektors, nämlich:

$$x = |x| \cdot \frac{x}{|x|}.$$

Fakt: Sind $x, y \neq 0$ und ist φ das Mass des Winkels zwischen ihnen, so gilt

$$\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi.$$

Insbesondere sind zwei Vektoren mit $\langle x, y \rangle = 0$ zueinander *orthogonal*.

In Dimension 3 gibt es ausserdem die folgenden Begriffe:

Definition: Drei linear unabhängige Vektoren x, y, z des Anschauungsraums bilden ein *Rechtssystem*, wenn sie in dieser Reihenfolge durch Daumen, Zeigefinger, und Mittelfinger der gespreizten *rechten* Hand dargestellt werden können.

Bemerkung: Sobald es auf die Händigkeit ankommt, wählt man das Koordinatensystem des Anschauungsraums so, dass die Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 ein Rechtssystem bilden. Dann sind drei beliebige Spaltenvektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ ein Rechtssystem genau dann, wenn die Determinante der 3×3 -Matrix (x, y, z) positiv ist.

Definition: Das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* zweier Spaltenvektoren in \mathbb{R}^3 ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Fakt: Seien x und y nichttriviale Spaltenvektoren im \mathbb{R}^3 , und sei φ das Mass des Winkels zwischen ihnen. Dann hat $x \times y$ den Absolutbetrag $|x| \cdot |y| \cdot \sin \varphi$ und ist orthogonal zu x und y . Insbesondere ist $x \times y$ der Nullvektor genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. Andernfalls bilden $x, y, x \times y$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Fakt: Für je zwei linear unabhängige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist $|x \times y|$ der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Fakt: Für je drei linear unabhängige Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ ist $|(x \times y) \cdot z|$ das Volumen des von x, y, z aufgespannten Raumpats.

1.13 Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten: Ein *kartesisches Koordinatensystem* ist eine Identifizierung des n -dimensionalen Anschauungsraums mit \mathbb{R}^n , bei welcher der Abstand zweier Punkte x und y durch den Absolutbetrag $|x - y|$ gegeben ist. Dies bedingt, dass die Koordinatenachsen orthogonal zueinander stehen. Sofern nichts anderes gesagt wird, meint man stets ein kartesisches Koordinatensystem.

Ebene Polarkoordinaten: Jeder Vektor im \mathbb{R}^2 lässt sich schreiben in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

für $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dabei ist r der Absolutbetrag von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, und φ ist der Winkel zwischen der positiven x -Achse und dem von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aufgespannten Strahl, von der x -Achse aus entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen. Der Winkel φ ist nur bis auf Addition eines Vielfachen von

2π bestimmt, und im Fall $r = 0$ überhaupt nicht. Wenn es nötig wird (und am besten nur dann), schränkt man φ künstlich auf ein Intervall der Form $]-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi[$ ein; im Fall $r > 0$ ist es dann eindeutig bestimmt. Wir haben also z.B. eine surjektive Abbildung

$$[0, \infty[\times]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

deren Einschränkung eine bijektive Abbildung

$$]0, \infty[\times]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

liefert. Die Umkehrfunktion der letzteren kann man beschreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arg(x + iy) \end{pmatrix},$$

wobei das Argument $\arg(x + iy)$ auf das Intervall $]-\pi, \pi]$ normiert wird. Man erhält es dann zum Beispiel durch die explizite Formel

$$\arg(x + iy) = \operatorname{sgn}(y) \cdot \arccos \frac{x}{r}.$$

Zylinderkoordinaten: Diese erhält man, indem man ebene Polarkoordinaten auf zwei der drei Koordinaten im \mathbb{R}^3 anwendet, zum Beispiel also mit der surjektiven Abbildung

$$[0, \infty[\times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Kugelkoordinaten: Hierfür wendet man auf die Größen ρ und z der Zylinderkoordinaten nochmals ebene Polarkoordinaten an und erhält die surjektive Abbildung

$$[0, \infty[\times]-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Dabei ist r der Absolutbetrag von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Betrachten wir $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Nordpol und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Südpol der Einheitskugel und $z = 0$ als Äquatorebene, so gibt φ den Längengrad und ϑ den Breitengrad eines Punktes an. Die Einschränkung liefert eine bijektive Abbildung

$$]0, \infty[\times]-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Begriffsbestimmung

Wir betrachten nur Differentialgleichungen für Funktionen *einer* (reellen) Variablen.

Definition: Für eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und eine Funktion $G: V \rightarrow \mathbb{R}$ heisst

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

eine (*implizite gewöhnliche*) *Differentialgleichung der Ordnung n* . Jede auf einem Intervall definierte n -mal differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{graph}(y, y', \dots, y^{(n)}) \subset V$, für welche diese Gleichung gilt, heisst eine *Lösung der Differentialgleichung*.

Kann man die Gleichung nach $y^{(n)}$ auflösen, so erhält man die folgende Variante:

Definition: Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ heisst

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine (*explizite gewöhnliche*) *Differentialgleichung der Ordnung n* . Jede auf einem Intervall definierte n -mal differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{graph}(y, y', \dots, y^{(n-1)}) \subset U$, für welche diese Gleichung gilt, heisst eine *Lösung der Differentialgleichung*.

Geometrische Interpretation: Im Fall $n = 1$ betrachte für jeden Punkt $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ die Richtung der Geraden durch (x, y) mit Steigung $F(x, y)$. Die Gesamtheit dieser Richtungen heisst ein *Richtungsfeld* auf U . Die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = F(x, y)$ besagt dann, dass der Graph der Funktion $x \mapsto y(x)$ in jedem Punkt tangential zu diesem Richtungsfeld sein muss. Die Graphen aller Lösungen bilden in der Regel eine von einem reellen Parameter abhängige *Kurvenschar*, welche die Menge U überdeckt.

Bemerkung: Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung besitzt in der Regel eine von n reellen Parametern abhängige Familie von Lösungen. Eine eindeutige Lösung auszusondern erfordert daher in der Regel noch n zusätzliche *Nebenbedingungen*.

Definition: Eine Differentialgleichung zusammen mit den Nebenbedingungen

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n - 1$$

für einen gegebenen Punkt $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in U$ heisst ein *Anfangswertproblem*.

Definition: Eine Differentialgleichung für eine Funktion $y: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit Nebenbedingungen der Form $y^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$ für gewisse (k, i) heisst ein *Randwertproblem*.

Beispiel: Die Bestimmung der Flugbahn eines Basketballs mit gegebener Anfangsrichtung und -geschwindigkeit ist ein Anfangswertproblem. Die Bestimmung der Anfangsrichtung und -geschwindigkeit, so dass der Ball im Korb landet, ist ein Randwertproblem.

8.2 Existenz und Eindeutigkeit

Definition: Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst (*global*) *Lipschitz-stetig*, falls gilt:

$$\exists c > 0 \forall x, x' \in X: |f(x) - f(x')| \leq c \cdot |x - x'|.$$

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heisst *lokal Lipschitz-stetig*, falls X durch offene Mengen X' überdeckt werden kann, so dass die Einschränkung $f|_{X'}$ Lipschitz-stetig ist.

Fakt: (a) Alle Grundrechenarten definieren lokal Lipschitz-stetige Funktionen.

(b) Jede differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung ist lokal Lipschitz-stetig.

(c) Jede Komposition lokal Lipschitz-stetiger Funktionen ist lokal Lipschitz-stetig.

(d) Eine vektorwertige Funktion ist lokal Lipschitz-stetig genau dann, wenn ihre Komponentenfunktionen es sind.

Beispiel: Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist global Lipschitz-stetig.

Beispiel: Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Teilmenge und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, und sei $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in U$ ein Anfangswert.

(a) Das zugehörige Anfangswertproblem besitzt eine auf einem offenen Intervall $]x_1, x_2[$ mit $x_0 \in]x_1, x_2[$ definierte Lösung.

(b) Je zwei auf solchen Intervallen $]x_1, x_2[$ bzw. $]x'_1, x'_2[$ definierte Lösungen stimmen auf dem Durchschnitt der Intervalle überein.

(c) Es existiert eine eindeutige *maximale Lösung*, das heisst, eine mit maximalem Definitionsintervall $]x_1, x_2[$.

(d) Der Graph der maximalen Lösung verlässt jede kompakte Teilmenge $K \subset U$, das heisst, es existiert ein kompaktes Teilintervall $[x'_1, x'_2] \subset]x_1, x_2[$, so dass gilt

$$\forall x \in]x_1, x_2[\setminus [x'_1, x'_2]: (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \notin K.$$

Bemerkung: Die Aussage (d) bedeutet anschaulich, dass der Graph der maximalen Lösung in beide Richtungen entweder auf den Rand von U hin oder ins Unendliche weg läuft.

Anwendung: Nehmen wir an, wir haben gewisse Lösungen gefunden, sei es durch Raten oder mit einer der im folgenden besprochenen Lösungsmethoden oder sonst irgendwie. Wenn dann die Graphen dieser Lösungen die gesamte Menge U überdecken und die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, so bilden diese Lösungen aufgrund der Eindeutigkeit schon alle Lösungen.

Die resultierende Formel für die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung hängt dann in der Regel von n noch zu bestimmenden Konstanten ab. Diese findet man durch Einsetzen der Formel in die gegebenen Nebenbedingungen und Lösen des resultierenden Gleichungssystems.

Für einfache Differentialgleichungen kann man oft gewisse Lösungen erraten.

Beispiel: Das Richtungsfeld der auf $U := (\mathbb{R}^{>0})^2$ definierten Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ zeigt in jedem Punkt geradeaus vom Ursprung weg. Als Lösungskurven können wir somit die Geraden $y = ax$ erraten für alle $a > 0$. Da die Funktionen $x \mapsto ax$ tatsächlich die Differentialgleichung erfüllen und ihre Graphen ganz U überdecken, und die Funktion $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ lokal Lipschitz-stetig ist, sind dies alle Lösungen.

Konstruktion: Das zu einem Richtungsfeld $(x, y) \mapsto F(x, y)$ orthogonale Richtungsfeld ist gegeben durch $(x, y) \mapsto -\frac{1}{F(x, y)}$ überall wo $F(x, y) \neq 0$ ist. Dessen Lösungskurven heissen *Orthogonaltrajektorien* zu den Lösungskurven des ursprünglichen Richtungsfelds.

Beispiel: Das zu dem vorigen Beispiel orthogonale Richtungsfeld ist gegeben durch die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$. Als Lösungskurven erraten wir die Viertelkreise $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ für alle $r > 0$. Aus denselben Gründen wie vorher sind dies alle Lösungen.

Beispiel: Betrachte die auf $U := \mathbb{R}^2$ definierte Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y^2$. Um Lösungen zu erraten, nehmen wir an, dass eine irgendwo definierte lokale Lösung $x \mapsto y(x)$ eine invertierbare Funktion mit $y(x) \neq 0$ ist. Die Umkehrfunktion $y \mapsto x(y)$ erfüllt dann die Differentialgleichung $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$. Nach dem Hauptsatz sind deren Lösungen gleich $\int y^{-2} dy = c - y^{-1}$ für alle Konstanten c . Auflösen der Gleichung $x = c - y^{-1}$ nach y liefert $y = \frac{1}{c-x}$. Durch Nachrechnen verifizieren wir, dass die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{c-x}$ für $x \neq c$ tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind. Konkret geht durch jeden Punkt (x_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ die Lösungskurve $y = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$. Schliesslich hat das Anfangswertproblem im Fall $y_0 = 0$ die triviale Lösung $y = 0$. Da die Funktion $(x, y) \mapsto y^2$ überall lokal Lipschitz-stetig ist, sind damit alle Lösungen gefunden. Das maximale Existenzintervall der Lösung durch (x_0, y_0) ist

$$\left\{ \begin{array}{ll}] -\infty, x_0 + \frac{1}{y_0}[& \text{für } y_0 > 0, \\] -\infty, \infty[& \text{für } y_0 = 0, \\] x_0 + \frac{1}{y_0}, \infty[& \text{für } y_0 < 0. \end{array} \right.$$

Beispiel: Betrachte die auf $U := \mathbb{R}^2$ definierte Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 3|y|^{2/3}$. Mit derselben Methode wie im vorigen Beispiel errät man die Lösungen $y = (x - c)^3$ und $y = 0$. Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz garantiert die lokale Eindeutigkeit der Lösung aber nur für $y \neq 0$, weil die Funktion $(x, y) \mapsto 3|y|^{2/3}$ nur dort lokal Lipschitz-stetig ist.

Tatsächlich ist für beliebige $c_1 \leq c_2$ einschliesslich $c_1 = -\infty$ und/oder $c_2 = \infty$ die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} (x - c_1)^3 & \text{für } x \leq c_1, \\ 0 & \text{für } c_1 < x < c_2, \\ (x - c_2)^3 & \text{für } x \geq c_2, \end{cases}$$

eine Lösung. Für jeden Anfangswert (x_0, y_0) hat das Anfangswertproblem also eine auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung, aber im allgemeinen keine eindeutige.

8.3 Potenzreihenlösungen

Sind die in einer Differentialgleichung vorkommenden Funktionen in Potenzreihen entwickelbar, so kann man hoffen, dass auch die Lösungen in Potenzreihen entwickelbar sind. Solche Lösungen kann man manchmal finden durch Ansatz und Koeffizientenvergleich.

Beispiel: Gewisse partielle Differentialgleichungen kann man zurückführen auf eine sogenannte *Besselsche* Differentialgleichung der Form

$$f''(x) + \frac{1}{x} \cdot f'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot f(x) = 0$$

für eine ganze Zahl $n \geq 0$. Wir suchen alle in der Nähe von $x = 0$ definierten Lösungen der Form $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ für noch zu bestimmende Koeffizienten a_k . Mit $a_{-1} := a_{-2} := 0$ wird die Differentialgleichung äquivalent zu $\sum_{k \geq 0} (a_{k-2} - a_k(n^2 - k^2))x^k = 0$, nach dem Potenzreihenidentitätssatz also zu

$$a_{k-2} = a_k(n^2 - k^2) \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Die einzigen Lösungen dieser Rekursionsformel sind gegeben durch

$$a_{n+2\ell} = \frac{(-1)^\ell n!}{4^\ell \ell! (n + \ell)!} \cdot a_n$$

für alle $\ell \geq 0$ und allen übrigen $a_k = 0$. Betrachte also die Potenzreihe

$$J_n(x) := \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell}{4^\ell \ell! (n + \ell)!} \cdot x^{n+2\ell}.$$

Da deren Koeffizienten schneller gegen Null gehen als die Koeffizienten der Exponentialfunktion, hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ . Somit ist sie tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung, und die allgemeine Potenzreihenlösung hat die Gestalt $f(x) = c \cdot J_n(x)$ für eine beliebige Konstante c . Die Funktion J_n heisst die *n-te Besselfunktion erster Gattung*. (Vorsicht: Die Differentialgleichung besitzt noch weitere Lösungen, die sich nicht als Potenzreihen in x darstellen lassen.)

8.4 Separierbare Differentialgleichungen

Definition: Eine *separierbare* Differentialgleichung ist eine der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

Diese hat einerseits die konstanten Lösungen $y = y_0$ für alle y_0 mit $g(y_0) = 0$. Andererseits gilt für eine nichtkonstante Lösung zumindest teilweise $y' \neq 0$ und somit $g(y) \neq 0$. Dort können wir die Variablen separieren durch die formale Umformung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \iff \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \iff \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Für jede Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, und jede invertierbare Stammfunktion $H(y)$ von $\frac{1}{g(y)}$ und jede Konstante c ist also $x \mapsto H^{-1}(F(x) + c)$, wo definiert, eine Lösung. Das maximale Definitionsintervall findet man in der Regel am besten am Ende anhand der gefundenen Lösungsformel.

Beispiel: Die Beispiele $y' = \frac{y}{x}$ und $y' = -\frac{x}{y}$ und $y' = y^2$ und $y' = 3|y|^{2/3}$ aus Abschnitt 8.2 sind alle separierbar und lassen sich mit dieser Methode systematisch lösen.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ ist separierbar. Da die rechte Seite überall $\neq 0$ ist, ist jede Lösung lokal invertierbar. Wir finden sie durch die Rechnung

$$\arctan y = \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx = x + c \iff y = \tan(x + c)$$

für eine Konstante c . Ihr maximales Definitionsintervall ist $]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}[$.

Beispiel: Die für $|x|, |y| < 1$ definierte Differentialgleichung $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ ist separierbar. Sie hat keine konstanten Lösungen. Ihre nichtkonstanten Lösungen berechnen sich durch

$$\begin{aligned} \arcsin y &= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ \implies y &= \sin(\arcsin x + c) = x \cdot \cos c \pm \sqrt{1-x^2} \cdot \sin c = ax + b\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Rückeinsetzen in die Differentialgleichung liefert die Zusatzbedingung $y' = a - \frac{bx}{\sqrt{1-x^2}} > 0$. Das maximale Definitionsintervall ist hier stets $] -1, 1[$.

Variante: Manchmal kann man eine Differentialgleichung durch Substitution separierbar machen. Speziell wird eine Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$ durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$u' = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(u)}{x} - \frac{u}{x} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

8.5 Lineare Differentialgleichungen

Beispiel: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ für $x \neq 0$ wird durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{x} &\iff \operatorname{arsinh} u = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c \\ &\iff u = \sinh(\log px) = \frac{p^2 x^2 - 1}{2px} \\ &\iff y = \frac{p^2 x^2 - 1}{2p}\end{aligned}$$

für eine Konstante $p = \pm e^c \neq 0$.

Beispiel: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{x+qy}{qx-y}$ wird durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{q-u} \cdot \frac{1}{x} &\iff q \cdot \arctan u - \frac{1}{2} \cdot \log(1+u^2) = \int \frac{q-u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x} \\ &\iff q \cdot \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \cdot \log \frac{x^2+y^2}{x^2} = \log|x| + c \\ &\iff q \cdot \arctan \frac{y}{x} = c + \log \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man zwar nicht elementar nach y auflösen, gibt aber die Lösungen als implizite Funktionen an. In Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ wird sie zu

$$q\varphi = c + \log r \iff r = r_0 \cdot e^{q\varphi}$$

für eine Konstante $r_0 > 0$. Die Lösungskurven sind also logarithmische Spiralen.

8.5 Lineare Differentialgleichungen

Definition: Ein *linearer Differentialoperator* L der *Ordnung* n auf einem Intervall I ist ein Ausdruck der Form

$$L := a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x)$$

für gegebene Funktionen a_0, \dots, a_n auf I . Der Operator ordnet jeder n -mal differenzierbaren Funktion y auf I die folgende Funktion auf I zu:

$$x \mapsto Ly(x) := a_0(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) \cdot y(x).$$

Definition: Eine *lineare Differentialgleichung* ist eine der Form

$$Ly(x) = b(x).$$

Ist $b(x)$ identisch Null, so heisst die Differentialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Fakt: Für je zwei auf I definierte Lösungen y_1 und y_2 der homogenen Gleichung $Ly = 0$ und je zwei Konstanten λ_1 und λ_2 ist auch $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ eine Lösung von $Ly = 0$. Die auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung bilden also einen Vektorraum. Die Elemente einer gewählten Basis dieses Vektorraums heissen *Fundamentallösungen*. Die *allgemeine Lösung* ist dann eine Linearkombination der Fundamentallösungen mit noch zu bestimmenden konstanten Koeffizienten.

Fakt: Für jede auf I definierte Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $Ly = b$ und jede auf I definierte n -mal differenzierbare Funktion y_h ist $y_p + y_h$ eine Lösung von $Ly = b$ genau dann, wenn y_h eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ ist.

Folge: Die *allgemeine Lösung* einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $Ly = b$ findet man, indem man die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung $Ly = 0$ zu einer beliebig gewählten *partikulären Lösung* y_p der inhomogenen Gleichung addiert.

Fakt: Ist y_j eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_j$ für jedes j , so ist $y_1 + \dots + y_r$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_1 + \dots + b_r$.

Satz: Sei $a_0(x)$ identisch gleich 1, und seien die Funktionen a_1, \dots, a_n, b stetig. Dann gilt:

- (a) Für jeden Anfangswert besitzt $Ly = b$ eine eindeutige auf ganz I definierte Lösung.
- (b) Die auf I definierten Lösungen von $Ly = 0$ bilden einen Vektorraum der Dimension n .

Spezialfall: Betrachte eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y' = p(x) \cdot y + q(x).$$

Die zugehörige homogene Gleichung $y' = \frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y$ ist separierbar. Eine Lösung findet man durch die Rechnung

$$\frac{dy}{y} = p(x) dx \quad \iff \quad \log y = \int \frac{dy}{y} = \int p(x) dx \quad \iff \quad y = e^{\int p(x) dx}.$$

Da diese Lösung überall definiert und $\neq 0$ ist, ist sie nach dem obigen Satz Basis des eindimensionalen Lösungsraums, also eine Fundamentallösung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit $y(x) = \lambda \cdot e^{P(x)}$ für eine fest gewählte Stammfunktion $P(x) = \int p(x) dx$ und eine noch zu bestimmende Konstante λ .

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung findet man durch *Variation der Konstanten*, das heisst, durch den Ansatz $y(x) = \lambda(x) \cdot e^{P(x)}$ für eine noch zu bestimmende Funktion $x \mapsto \lambda(x)$. Nach Einsetzen und Ausrechnen wird die inhomogene Gleichung äquivalent zu $\lambda'(x) = q(x) \cdot e^{-P(x)}$. Integrieren und Rückeinsetzen liefert dann die Lösung

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \int q(x) e^{-P(x)} dx.$$

Für jede Wahl der Stammfunktion $\int q(x) e^{-P(x)} dx$ ist dies eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \int q(x) e^{-P(x)} dx + \lambda \cdot e^{P(x)}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante λ .

Beispiel: Die auf \mathbb{R} definierte lineare Differentialgleichung $y' = x^3 - xy$ hat die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' = -xy$ mit der Lösung $e^{\int(-x)dx} = e^{-x^2/2+c}$. Also ist $e^{-x^2/2}$ eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung. Die inhomogene Gleichung hat daher die Lösung $y(x) = e^{-x^2/2} \cdot \int x^3 e^{x^2/2} dx$. Mittels partieller Integration berechnet man $\int x^3 e^{x^2/2} dx = (x^2 - 2) \cdot e^{x^2/2} + c$ und erhält somit die partikuläre Lösung $y(x) = x^2 - 2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung hat also die Form

$$y(x) = x^2 - 2 + \lambda \cdot e^{-x^2/2}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante λ .

Beispiel: Die für $x > 0$ definierte lineare Differentialgleichung $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$ hat die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + \frac{y}{x} = 0$ mit der Lösung $e^{\int \frac{-dx}{x}} = e^{-\log x+c} = \frac{1}{x} \cdot e^c$. Also ist $\frac{1}{x}$ eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung. Die inhomogene Gleichung hat daher die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{x} \cdot \int \sqrt{x} \cdot x dx = \frac{1}{x} \cdot \int x^{3/2} dx = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} + c \right) = \frac{2}{5} \cdot x^{3/2} + c \cdot x^{-1}$$

für eine noch zu bestimmende Konstante c .

8.6 Konstante Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten löst man durch expliziten Ansatz und Koeffizientenvergleich. Der Einfachheit halber betrachten wir gleich auch komplexe Koeffizienten und komplexwertige Lösungen. Gegeben sei also ein linearer Differentialoperator der Ordnung n mit konstanten reellen oder komplexen Koeffizienten

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \cdot \frac{d}{dx} + a_n.$$

Definition: Das zugehörige Polynom

$$f_L(\lambda) := \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n$$

heißt das *charakteristische Polynom von L* . Seine Nullstellen in \mathbb{C} heißen die *Eigenwerte von L* .

Fakt: Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $Le^{\lambda x} = f_L(\lambda) e^{\lambda x}$. Insbesondere gilt $Le^{\lambda x} = 0$ genau dann, wenn λ ein Eigenwert von L ist.

Lemma: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und m seine Multiplizität als Eigenwert von L , beziehungsweise $m := 0$ falls λ kein Eigenwert von L ist. Sei weiter $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Dann gilt:

- (a) $(\frac{d}{dx} - \lambda')(x^k e^{\lambda x}) = (\lambda - \lambda')x^k e^{\lambda x} + kx^{k-1}e^{\lambda x}$ für alle $\lambda' \in \mathbb{C}$.
- (b) $L(x^k e^{\lambda x}) = 0$ falls $k < m$ ist.
- (c) $L(x^k e^{\lambda x}) = (cx^{k-m} + \text{niedrigere Terme in } x) \cdot e^{\lambda x}$ für eine Konstante $c \neq 0$, falls $k \geq m$ ist.

Lemma: Die Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x^k e^{\lambda x}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ sind \mathbb{C} -linear unabhängig.

Satz: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von L mit den entsprechenden Multiplizitäten m_1, \dots, m_r , so bilden die Funktionen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^k e^{\lambda_j x}$$

für alle $1 \leq j \leq r$ und $0 \leq k < m_j$ ein System von Fundamentallösungen der homogenen Differentialgleichung $Ly = 0$.

Variante: Hat L reelle Koeffizienten, so hat jedes Paar komplex konjugierter nicht-reeller Eigenwerte $\mu_j \pm i\nu_j$ dieselbe Multiplizität m_j . Die entsprechenden Fundamentallösungen

$$x^k e^{(\mu_j \pm i\nu_j)x} = x^k e^{\mu_j x} (\cos \nu_j x \pm i \sin \nu_j x)$$

für $0 \leq k < m_j$ kann man somit per Basiswechsel ersetzen durch die Lösungen

$$x^k e^{\mu_j x} \cos \nu_j x \quad \text{und} \quad x^k e^{\mu_j x} \sin \nu_j x.$$

Die resultierenden Lösungen bilden ein System von reellwertigen Fundamentallösungen.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y' + 3y = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda + 3$ und somit den einzigen Eigenwert $\lambda = -3$ der Multiplizität 1. Die allgemeine Lösung ist also $a \cdot e^{-3x}$ für eine Konstante a .

Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' - 6y' + 8y = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 4)$ und somit die beiden Eigenwerte 2 und 4 der Multiplizität 1. Die allgemeine Lösung ist also $a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{4x}$ für Konstanten a, b .

Beispiel: Die Differentialgleichung $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ beschreibt einen ungedämpften harmonischen Oszillator mit der Resonanzfrequenz $\omega > 0$. Sie hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \omega^2 = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)$ und somit die beiden Eigenwerte $\pm i\omega$ der Multiplizität 1. Die allgemeine reelle Lösung ist also $a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t$ für Konstanten a, b .

Beispiel: Die Differentialgleichung $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = 0$ beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator mit der Abklingkonstante $\gamma > 0$. Ihr charakteristisches Polynom ist $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2$.

Bei schwacher Dämpfung $\gamma < \omega$ hat sie die komplex konjugierten Eigenwerte $-\gamma \pm i\omega'$ der Multiplizität 1 für $\omega' := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, und somit die allgemeine Lösung $a \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega' t +$

$b \cdot e^{-\gamma t} \sin \omega' t$ für Konstanten a, b . Diese beschreibt eine abklingende Schwingung der Frequenz ω' .

Bei starker Dämpfung $\gamma > \omega$ hat sie zwei verschiedene reelle Eigenwerte $-\gamma \pm \delta$ der Multiplizität 1 für $\delta := \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, und somit die allgemeine Lösung $a \cdot e^{-(\gamma-\delta)t} + b \cdot e^{-(\gamma+\delta)t}$ für Konstanten a, b . Die periodische Komponente der Schwingung ist dann verschwunden.

Im Grenzfall $\gamma = \omega$ hat sie den reellen Eigenwert $-\gamma$ der Multiplizität 2, und somit die allgemeine Lösung $a \cdot e^{-\gamma t} + b \cdot t e^{-\gamma t}$ für Konstanten a, b .

Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' - y = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$ und somit die beiden Eigenwerte ± 1 der Multiplizität 1. Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$ für Konstanten a, b . Die Randbedingungen $u(0) = y(1) = 1$ sind dann äquivalent zu $a+b = a \cdot e + b \cdot e^{-1} = 1$. Auflösen dieses linearen Gleichungssystems liefert die einzige Lösung mit Randbedingungen $y(x) = \frac{e^x + e^{1-x}}{e+1}$.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = (\lambda-1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$ und somit den reellen Eigenwert 1 der Multiplizität 2 und die beiden komplex konjugierten Eigenwerte $-1 \pm 2i$ der Multiplizität 1. Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = a \cdot e^x + b \cdot x e^x + c \cdot e^{-x} \cos 2x + d \cdot e^{-x} \sin 2x$$

für Konstanten a, b, c, d . Wir fordern die zusätzlichen Nebenbedingungen $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ und $y(0) = 1$ sowie $y'(0) = 3$. Die erste davon ist äquivalent zu $a = b = 0$, und in diesem Fall sind die anderen beiden äquivalent zu $c = 1$ und $d = 2$. Die einzige Lösung mit den genannten Nebenbedingungen ist also

$$y(x) = e^{-x} \cos 2x + 2 \cdot e^{-x} \sin 2x.$$

Nun betrachten wir den inhomogenen Fall.

Fakt: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von L , so besitzt die inhomogene Differentialgleichung $Ly(x) = e^{\lambda x}$ die partikuläre Lösung $\frac{1}{f_L(\lambda)} e^{\lambda x}$.

Beispiel: Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = e^{-x}$, welche für $x \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben. *Lösung:* Wegen $f_L(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5$ ist $f_L(-1) = 16 \neq 0$. Somit ist $\frac{1}{16} e^{-x}$ eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(x) = \frac{1}{16} \cdot e^{-x} + a \cdot e^x + b \cdot x e^x + c \cdot e^{-x} \cos 2x + d \cdot e^{-x} \sin 2x$$

für Konstanten a, b, c, d . Die Nebenbedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ ist wieder äquivalent zu $a = b = 0$.

Satz: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und m seine Multiplizität als Eigenwert von L , beziehungsweise $m := 0$ falls λ kein Eigenwert von L ist. Sei weiter $P(x)$ ein Polynom vom Grad k . Dann besitzt die inhomogene Differentialgleichung

$$Ly(x) = P(x) e^{\lambda x}$$

8.7 Systeme von Differentialgleichungen

eine partikuläre Lösung der Form

$$y(x) = Q(x) e^{\lambda x}$$

für ein Polynom $Q(x)$ vom Grad $k + m$.

Variante: Seien die Koeffizienten von L reell. Seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, und sei m die gemeinsame Multiplizität von $\mu \pm i\nu$ als Eigenwerte von L , beziehungsweise $m = 0$ falls $\mu \pm i\nu$ keine Eigenwerte von L sind. Seien weiter $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome vom Grad $\leq k$. Dann besitzt die inhomogene Differentialgleichung

$$Ly(x) = P(x) e^{\mu x} \cos \nu x + Q(x) e^{\mu x} \sin \nu x$$

eine partikuläre Lösung der Form

$$y(x) = R(x) e^{\mu x} \cos \nu x + S(x) e^{\mu x} \sin \nu x$$

für Polynome $R(x)$ und $S(x)$ vom Grad $\leq k + m$.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y^{(5)} + y = xe^x$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^5 + 1$. Da 1 keine Nullstelle davon ist, existiert eine partikuläre Lösung der Form $y(x) = (ax + b)e^x$ für zu bestimmende Konstanten a, b . Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert die partikuläre Lösung $y(x) = (\frac{x}{2} - \frac{5}{4})e^x$.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y^{(5)} + y = xe^{-x}$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^5 + 1$ mit der einfachen Nullstelle -1 . Also existiert eine partikuläre Lösung der Form $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ für zu bestimmende Konstanten a, b, c . Da e^{-x} bereits eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist, können wir dabei schon a priori $c = 0$ setzen. Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert nun die partikuläre Lösung $y(x) = (\frac{x^2}{10} + \frac{2x}{5})e^{-x}$.

Beispiel: Für $\omega, \lambda > 0$ beschreibt die Differentialgleichung $\ddot{y} + \omega^2 y = \cos \lambda t$ einen periodisch angeregten ungedämpften harmonischen Oszillator. Ist die Anregungsfrequenz λ verschieden von der Resonanzfrequenz ω , so besitzt die Gleichung die partikuläre Lösung $\frac{\cos \lambda t}{\omega^2 - \lambda^2}$. Man beachte, dass deren Amplitude $\frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}$ umso grösser ist, je näher die Anregungsfrequenz bei der Resonanzfrequenz liegt. Im Grenzfall $\lambda = \omega$ besitzt die Gleichung die partikuläre Lösung $\frac{t \sin \lambda t}{2\omega}$ mit linear wachsender Amplitude $\frac{t}{2\omega}$.

8.7 Systeme von Differentialgleichungen

Definition: Ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} &= F_1(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_m^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_m^{(n)} &= F_m(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_m^{(n-1)}) \end{aligned}$$

heisst ein *System von m gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen der Ordnung n* .

Gelegentlich ist es günstig, ein solches System in Termen von Vektoren zu schreiben. Sei zum Beispiel $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ und $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)$ eine Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Mit $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ ist dann

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{F}(x, \vec{y})$$

ein System von m gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Spezialfall: Via $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist eine komplexe Differentialgleichung nichts anderes als ein System zweier gekoppelter reeller Differentialgleichungen.

Satz: Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz aus Abschnitt 8.2 gilt entsprechend für Systeme von Differentialgleichungen.

Viele Probleme aus der Physik führen auf Systeme gekoppelter Differentialgleichungen, die sich nur unter günstigen Umständen oder vereinfachenden Annahmen auf einzelne Differentialgleichungen reduzieren lassen. Die Methoden dafür hängen von der Situation ab.

Beispiel: Freier Fall eines Körpers in einem homogenen Schwerfeld.

Spezialfall: Sei A eine $m \times m$ -Matrix mit reellen oder komplexen Koeffizienten, und betrachte die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A \cdot \vec{y}$$

für eine als Spaltenvektor geschriebene vektorwertige Funktion $x \mapsto \vec{y}(x)$. Wie in Abschnitt 8.6 ist jede Lösung eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt $x^k e^{\lambda x}$. Speziell gilt:

Fakt: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und sei \vec{v} ein von Null verschiedener Vektor. Dann ist $y(x) := e^{\lambda x} \vec{v}$ eine Lösung genau dann, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Folge: Ist A diagonalisierbar mit einer Basis aus Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so hat die allgemeine Lösung die Gestalt

$$y(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + \dots + a_m e^{\lambda_m x} \vec{v}_m$$

für beliebige Konstanten a_1, \dots, a_m .

Beispiel: Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = -y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = 5 \\ y_2(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Lösung: Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ hat den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -4 . Die Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = a e^x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b e^{-4x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für noch zu bestimmende Konstanten a, b . Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit der eindeutigen Lösung $a = 1$ und $b = -2$.

8.8 Anwendung: Mehrkörperproblem

Betrachte Punktmassen $m_1, \dots, m_r > 0$ an paarweise verschiedenen Stellen $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{R}^3$. Zwischen ihnen wirke das *Newtonsche Gravitationsgesetz*, das heisst, für alle $i \neq j$ übt die Masse j auf die Masse i eine Kraft mit Betrag $\frac{Gm_i m_j}{|z_j - z_i|^2}$ und Richtung $z_j - z_i$ aus. Der entsprechende Kraftvektor ist also $Gm_i m_j \cdot \frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|^3}$. Andererseits sei der Ort z_i eine zweimal differenzierbare Funktion der Zeit t . Dann ist \ddot{z}_i die Beschleunigung der Masse i und somit $m_i \cdot \ddot{z}_i$ die auf sie wirkende Totalkraft. Für jedes i gilt also die Gleichung

$$m_i \cdot \ddot{z}_i = \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \cdot \frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|^3}.$$

Dies ist ein System von $3r$ gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Solange keine Massen kollidieren, ist die rechte Seite definiert und als rationale Funktion lokal Lipschitz-stetig. Für jeden Anfangswert, bestehend aus Orten $z_i(0)$ und Geschwindigkeiten $\dot{z}_i(0)$, existiert also eine eindeutig bestimmte maximale Lösung.

Das allgemeine *Mehrkörperproblem* ist die Frage, wie sich das System langfristig entwickelt: Wie lange existiert die Lösung? Gibt es eine Kollision? Fliegt eine der Massen ins Unendliche weg? Welche periodischen Lösungen gibt es? Ist das System stabil, das heisst, bleibt sein langfristiges Verhalten unter kleinen Änderungen der Anfangswerte qualitativ gleich? Diese Fragen sind für $r \geq 3$ im allgemeinen noch ungelöst. Es gibt aber zum Teil faszinierende Einzelresultate; zum Beispiel die Choreographien von Simó: http://www.scholarpedia.org/article/N-body_choreographies.

Will man die Umlaufbahn eines Planeten um die Sonne beschreiben, so erhält man schon eine gute Näherung, wenn man die Einflüsse der Planeten untereinander ignoriert, sich also auf den Fall $r = 2$ beschränkt. Dieser Spezialfall heisst auch das *Zweikörperproblem* oder *Kepler-Problem*, weil es ursprünglich von Kepler beantwortet wurde.

Sei also jetzt $r = 2$. Dann haben wir ein System von 6 gekoppelten Differentialgleichungen der Ordnung 2. Der Anfangswert hängt also von insgesamt 12 Parametern ab. Zuerst reduzieren wir in mehreren Schritten die Parameterzahl.

Schritt 1: Sei $z_{12} := \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ der Schwerpunkt des Gesamtsystems. Dann ist $\ddot{z}_{12} = 0$. Diese Differentialgleichung hat die eindeutige Lösung $z_{12}(t) = z_{12}(0) + \dot{z}_{12}(0) \cdot t$. Mit $z := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (z_1 - z_2)$ gilt dann $z_1 = z_{12} + \frac{z}{m_1}$ und $z_2 = z_{12} - \frac{z}{m_2}$, und z erfüllt die Differentialgleichung mit nur noch 6 Parametern

$$\ddot{z} = -\frac{Gm_1^3 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{z}{|z|^3}.$$

Physikalisch gesehen haben wir dabei eine Koordinatentransformation von Inertialsystemen durchgeführt.

Schritt 2: Zur Vereinfachung der Rechnung wählen wir die physikalischen Einheiten so, dass der Vorfaktor gleich 1 ist. Dann haben wir die vektorwertige Differentialgleichung

$$\ddot{z} = -\frac{z}{|z|^3}.$$

Schritt 3: Sei U der von $z(0)$ und $\dot{z}(0)$ aufgespannte Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Wegen $z(0) \neq 0$ ist seine Dimension gleich 1 oder 2. Nach einer geeigneten Drehung können wir also oBdA annehmen, dass U einer der beiden Unterräume $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$ von \mathbb{R}^3 ist. Dann können wir dasselbe Anfangswertproblem innerhalb U betrachten, wo es ebenfalls eine Lösung besitzt. Diese ist aber auch eine Lösung des Anfangswertproblems in \mathbb{R}^3 , und aus deren Eindeutigkeit folgt nun, dass die gesuchte Lösung z für alle Zeiten in U bleibt.

Schritt 4: Im Fall $\dim U = 1$ reduziert sich das Problem auf die Differentialgleichung $\ddot{x} = -\frac{1}{x^2}$ für eine reelle Funktion $x > 0$. Dies ist die Situation des *freien Falls*, die wir hier beiseite lassen.

Schritt 5: Im Fall $\dim U = 2$ können wir \mathbb{R}^3 durch \mathbb{R}^2 ersetzen. Sodann identifizieren wir \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} und transformieren die Gleichung in Polarkoordinaten. Mit $z = re^{i\varphi}$ für reelle r und φ übersetzt sich die Gleichung in das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}.$$

Schritt 6: An diesem können wir ablesen, dass das *Winkelmoment* $\mu := r^2\dot{\varphi}$ die Gleichung $\dot{\mu} = 0$ erfüllt, also konstant ist. Zur Zeit $t = 0$ ist es ausserdem ungleich Null, weil $z(0)$ und $\dot{z}(0)$ linear unabhängig sind. Nach einer etwaigen Spiegelung können wir oBdA annehmen, dass $\mu > 0$ ist.

Schritt 7: Auch die *Gesamtenergie* des Systems, bestehend aus kinetischer und potentieller Energie, also die Funktion

$$E := \frac{1}{2} \cdot |\dot{z}|^2 - \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{r}$$

erfüllt die Gleichung $\dot{E} = 0$ und ist somit konstant.

Schritt 8: Mit diesen beiden Erhaltungsgrößen reduziert sich das Gleichungssystem auf

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\mu}{r^2} \\ \dot{r}^2 = 2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2} \end{cases}.$$

Schritt 9: Hier ist die zweite Gleichung unabhängig von φ . Im Prinzip haben wir das Problem damit auf eine Kaskade zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert. Diese besitzen aber keine elementare Lösung.

8.8 Anwendung: Mehrkörperproblem

Wir verzichten daher darauf, den Ort z als Funktion der Zeit t zu beschreiben, und suchen nur nach dem Verlauf der Bahn. Da wir eine Rundlaufbewegung erwarten, drücken wir r als Funktion des Winkels φ aus. Unter Anwendung der Kettenregel folgt

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{\mu^2} \cdot \left(2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2}\right).$$

Schritt 10: Durch die Variablentransformation $u = \frac{1}{r}$ übersetzt sich diese Gleichung zu

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{2E}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4}\right) - \left(u - \frac{1}{\mu^2}\right)^2.$$

Diese Gleichung erfordert, dass der Wert der ersten Klammer auf der rechten Seite ≥ 0 ist. Schreiben wir also $\frac{2E}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4} = H^2$ für eine Konstante $H \geq 0$.

Schritt 11: Im Fall $H = 0$ muss überall $u = \frac{1}{\mu^2}$, also $r = \mu^2$ sein. Dann ist die Bewegung kreisförmig.

Schritt 12: Im Fall $H > 0$ reduziert die abermalige Variablentransformation $u = Hv + \frac{1}{\mu^2}$ die Differentialgleichung auf

$$\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = 1 - v^2.$$

Schritt 13: Diese ist separierbar und hat die allgemeine Lösung $v = \sin(\varphi - \varphi_0)$ für eine Konstante φ_0 . Nach einer Drehung um den Winkel φ_0 können wir oBdA $\varphi_0 = 0$ annehmen. Rückeinsetzen liefert dann die Lösung

$$r = \frac{\mu^2}{1 + H\mu^2 \sin \varphi}.$$

Dieselbe Formel beschreibt auch die Lösung im Fall $H = 0$ aus Schritt 11.

Schritt 14: Schliesslich übersetzen wir die letzte Gleichung in eine für x und y mit $x + iy = re^{i\varphi}$ und erhalten

$$x^2 = 2E\mu^2 y^2 - 2H\mu^4 y + \mu^4.$$

Die dadurch beschriebene Kurve ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eine Ellipse im Fall } E < 0, \\ \text{eine Parabel im Fall } E = 0, \\ \text{eine Hyperbel im Fall } E > 0. \end{array} \right.$$

Im ersten Fall ist die Bahn also periodisch, in den anderen beiden Fällen fliegen die Massen ins Unendliche weg.

9 Differentialrechnung mehrerer Variablen

9.1 Erste Ableitung

Betrachte eine reellwertige Funktion von n Variablen x_1, \dots, x_n , das heisst, eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Fall einer Variablen ist die Funktion differenzierbar in einem Punkt von X , wenn sie in dessen Nähe durch eine lineare Funktion approximierbar ist:

Definition: Die Funktion f heisst *(total) differenzierbar in* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X$, falls reelle Zahlen a_1, \dots, a_n existieren, so dass gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\xi_1, \dots, \xi_n) + a_1 \cdot (x_1 - \xi_1) + \dots + a_n \cdot (x_n - \xi_n) + o(|x - \xi|)$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \xi$ in X . Die Zahlen a_i sind dann eindeutig bestimmt. Der Vektor

$$(\text{grad } f)(\xi) := \nabla f(\xi) := (a_1, \dots, a_n)$$

heisst der *Gradient von f* oder „*Nabla f*“ oder einfach die *erste Ableitung von f* im Punkt ξ . Die Funktion f heisst *(total) differenzierbar*, falls sie in jedem Punkt von X differenzierbar ist.

Geometrische Interpretation: Ist f differenzierbar in $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, so ist

$$y = f(\xi) + a_1 \cdot (x_1 - \xi_1) + \dots + a_n \cdot (x_n - \xi_n)$$

die Gleichung der *Tangentialhyperebene* an $\text{graph}(f)$ im Punkt $(\xi_1, \dots, \xi_n, f(\xi)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Damit f differenzierbar in ξ ist, muss die lineare Approximation gelten, egal wie der Punkt x auf den Punkt ξ zu läuft. Wenn wir die Bewegung von x auf eine Gerade durch ξ einschränken, erhalten wir den folgenden Begriff:

Definition: Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^n$ ist die *Richtungsableitung von f in Richtung e im Punkt ξ* , falls sie existiert, gleich

$$D_e f(\xi) := \left(\frac{d}{dt} f(\xi + te) \right) \Big|_{t=0}.$$

Fakt: Ist f total differenzierbar in ξ , so existiert die Richtungsableitung in jede Richtung e und ist gegeben durch das Skalarprodukt

$$D_e f(\xi) = \langle \text{grad } f(\xi), e \rangle.$$

Geometrische Interpretation: Ist der Gradient ungleich Null, so zeigt er die Richtung an, in der f am schnellsten wächst.

Wenn wir die Bewegung von x auf eine Koordinatenrichtung einschränken, das heisst, wenn wir alle Variablen ausser einer fest lassen, erhalten wir den folgenden Spezialfall:

Definition: Die Funktion f heisst *partiell differenzierbar nach x_i im Punkt $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$* , wenn die Funktion

$$x_i \mapsto f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, x_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$$

im Punkt ξ_i differenzierbar ist. Die Ableitung im Punkt ξ_i heisst dann die *partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt ξ* und wird bezeichnet mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ oder $f_{x_i}(\xi)$. Die partielle Ableitung ist also die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = D_e f(\xi)$$

für den i -ten Einheitsvektor $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Fakt: Ist f total differenzierbar in ξ , so ist f nach jeder Variablen partiell differenzierbar, und es gilt

$$\nabla f(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \right).$$

Fakt: Ist f total differenzierbar, so ist f stetig.

Beispiel: Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

besitzt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, aber keine weiteren Richtungsableitungen und ist auch nicht total differenzierbar und nicht einmal stetig im Ursprung.

Beispiel: Die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

besitzt die Richtungsableitung $D_{(c,s)} f(0, 0) = c^2 s$ in jede Richtung (c, s) , also insbesondere die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, und ist stetig, aber nicht total differenzierbar im Ursprung.

Beispiel: Die Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ist total differenzierbar mit $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Definition: Die Funktion f heisst *stetig differenzierbar*, falls sie überall differenzierbar ist und ihre Ableitungsfunktion ∇f stetig ist.

Satz: Eine Funktion ist stetig differenzierbar genau dann, wenn sie überall partiell differenzierbar ist und alle ihre partiellen Ableitungen stetig sind.

9.2 Kettenregel

Satz: Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $I \subset \mathbb{R}$, und seien $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g = (g_1, \dots, g_n): I \rightarrow X$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot \frac{dg_n}{dt}(t).$$

Sind f und g sogar stetig differenzierbar, so auch $f \circ g$.

Beispiel: Die vier Grundrechenarten sind, wo definiert, stetig differenzierbare Funktionen von zwei Variablen. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y \text{ hat die Ableitung } \nabla a(x, y) &= (1, 1), \\ m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy \text{ hat die Ableitung } \nabla m(x, y) &= (y, x). \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Funktionen in die obige Kettenregel ein, so erhält man die aus der Analysis I bekannte Summen- und Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(g_1 + g_2) = \frac{dg_1}{dt} + \frac{dg_2}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(g_1 g_2) = \frac{dg_1}{dt} \cdot g_2 + g_1 \cdot \frac{dg_2}{dt}.$$

Folge: Jede aus differenzierbaren Funktionen mittels Grundrechenarten und Komposition gebildete Funktion ist differenzierbar. Ebenso für stetig differenzierbare Funktionen.

Die Kettenregel mag etwas gewöhnungsbedürftig sein, da man von dem Fall einer Variablen her zwar ein Produkt, aber keine Summe erwartet. Es kann helfen, in einigen konkreten Situationen ihre Gültigkeit zu überprüfen.

Beispiel: Die Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2$ ist differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Nach der Kettenregel hat also die Funktion $\varphi \mapsto \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$ die Ableitung

$$2 \cos \varphi \cdot (\cos \varphi)' + 2 \sin \varphi \cdot (\sin \varphi)' = 2 \cos \varphi \cdot (-\sin \varphi)' + 2 \sin \varphi \cdot (\cos \varphi) = 0.$$

Das folgt unabhängig davon schon aus dem Satz von Pythagoras $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

9.3 Einfache Anwendungen

Beispiel: Berechne näherungsweise die Zahl $\alpha := \sqrt{3.03^2 + 3.95^2}$. *Lösung:* Die Funktion $r: (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ ist ausserhalb des Ursprungs differenzierbar mit der Ableitung $\nabla r = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$; die lineare Approximation liefert also den Näherungswert

$$5 + \frac{3}{5} \cdot (3.03 - 3) + \frac{4}{5} \cdot (3.95 - 4) = 4.978.$$

Der wahre Wert ist 4.97829...

Beispiel: Im Punkt P biegt der Bergweg ab; nach Südosten geht er mit 25% Steigung bergan, nach Süden mit 20% Gefälle bergab. Der Wanderer im Nebel möchte über die

Wiese möglichst rasch zum Gipfel. In welche Richtung muss er gehen, und wie steil ist es dorthin? *Lösung:* Wir legen ein Koordinatensystem so, dass die x -Achse nach Osten und die y -Achse nach Norden zeigt, und setzen voraus, dass die Höhenfunktion h differenzierbar ist. Wir wollen ihren Gradienten in P bestimmen. Nach Voraussetzung hat h die beiden Richtungsableitungen

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}h(P) = 0.25 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad D_{(0,-1)}h(P) = -0.2 = -\frac{1}{5}.$$

Durch Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems folgern wir

$$\nabla h(P) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Die Richtung des Gradienten ist somit

$$\arg \nabla h(P) = \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}} \approx 19.86^\circ$$

und die Steigung in diese Richtung gleich

$$|\nabla h(P)| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \approx 0.59 = 59\%.$$

Definition: Eine Menge von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, deren Durchschnitt mit jeder zur y -Achse parallelen Geraden entweder leer oder ein Intervall ist, heisst *y-einfach*. Der Begriff *x-einfach* ist analog definiert.

Beispiel: Für je zwei Funktionen $\varphi, \psi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ist die folgende Menge *y-einfach*:

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ und } \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

Fakt: Ist $X \subset \mathbb{R}^2$ *y-einfach* und hat $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ überall die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, so hängt $f(x, y)$ nicht von y ab, das heisst, es gilt $f(x, y) = g(x)$ für eine Funktion g .

Das entsprechende Resultat gilt für auf *x-einfachen* Teilmengen definierte Funktionen f mit $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, und analog in mehr als zwei Variablen.

Vorsicht: Dass die Voraussetzung an X wirklich nötig ist, zeigt die nicht *y-einfache* Teilmenge

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ oder } y \neq 0\}$$

und die Funktion mit identisch verschwindender partieller Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0, \\ x^2 \operatorname{sgn}(y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

9.4 Ableiten unter dem Integral

Satz: Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f: [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$. Dann ist die Funktion

$$\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \Phi(t) := \int_a^b f(x, t) \, dx$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$\Phi'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Damit kann man manche bestimmte Integrale berechnen, auch wenn die zugehörigen unbestimmten Integrale nicht elementar darstellbar sind.

Beispiel: Das bestimmte Integral $\Phi(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \, dx$ erfüllt für $\alpha \geq 0$ die Voraussetzungen des Satzes. Wir berechnen

$$\Phi'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{x^\alpha - 1}{\log x} \right) \, dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \cdot \log x}{\log x} \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Daraus folgt

$$\Phi(\alpha) = \int \Phi'(\alpha) \, d\alpha = \log(\alpha + 1) + c$$

für eine noch zu bestimmende Konstante c . Aber $\Phi(0) = \int_0^1 0 \, dx = 0$ impliziert $c = 0$ und somit

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \, dx = \log(\alpha + 1)$$

für alle $\alpha \geq 0$. Mit ein bisschen mehr Aufwand folgt dasselbe für alle $\alpha > -1$.

Beispiel: Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beweisskizze: Für jedes feste $0 < c \leq \infty$ betrachte die Hilfsfunktion

$$I_c: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto I_c(t) := \int_0^c e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Zunächst sei $c < \infty$, so dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Mittels partieller Integration berechnet sich dann die Ableitung von I_c zu

$$I_c'(t) = - \int_0^c e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{e^{-tc}}{1+t^2} \cdot (\cos c + t \sin c) - \frac{1}{1+t^2}.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daraus

$$I_c(T) - I_c(0) = \int_0^T \frac{e^{-tc}}{1+t^2} \cdot (\cos c + t \sin c) dt - \arctan T$$

für alle $T \geq 0$. Für festes T und $c \rightarrow \infty$ konvergiert $I_c(T)$ gegen das uneigentliche Integral $I_\infty(T)$, und eine Abschätzung durch $\int_0^T e^{-tc} dt = \frac{1-e^{-Tc}}{c}$ zeigt, dass $\int_0^T \frac{e^{-tc}}{1+t^2} \cdot (\cos c + t \sin c) dt$ gegen Null geht. Also gilt

$$I_\infty(T) - I_\infty(0) = -\arctan T$$

für alle $T \geq 0$. Eine Abschätzung durch $\int_0^\infty e^{-Tx} dx = \frac{1}{T}$ zeigt schliesslich, dass $I_\infty(T)$ gegen Null geht für $T \rightarrow \infty$, und daraus folgt

$$I_\infty(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \arctan T = \frac{\pi}{2}.$$

Beim Ableiten unter dem Integral kann man auch die Intervallgrenzen variieren:

Satz: Sei f eine stetig differenzierbare Funktion von zwei Variablen. Dann ist die Funktion

$$(a, b, t) \mapsto \Phi(a, b, t) := \int_a^b f(x, t) dx,$$

wo definiert, differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = -f(a, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = f(b, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Zusammen mit der Kettenregel impliziert dies:

Satz: Seien f eine stetig differenzierbare Funktion von zwei Variablen und a und b differenzierbare Funktionen einer Variablen. Dann ist die Funktion $\Psi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$, wo definiert, differenzierbar mit der Ableitung

$$\Psi'(t) = -f(a(t), t) \cdot a'(t) + f(b(t), t) \cdot b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

9.5 Höhere Ableitungen

Wie vorher betrachte eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definition: Ist f differenzierbar und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ebenfalls, so heisst f *zweimal differenzierbar*, und die Funktionen $f_{x_j x_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ heissen die *zweiten partiellen Ableitungen von f* . Analog definiert man *k -mal differenzierbar* und die *k -ten partiellen Ableitungen von f* oder *partiellen Ableitungen vom Grad k* für jedes $k > 0$.

Definition: Die Funktion f heisst k -mal stetig differenzierbar oder eine C^k -Funktion, wenn sie k -mal differenzierbar ist und ihre k -ten partiellen Ableitungen stetig sind.

Fakt: Jede $(k + 1)$ -mal differenzierbare Funktion ist k -mal stetig differenzierbar.

Satz: Für jede C^k -Funktion sind alle partiellen Ableitungen vom Grad $\leq k$ von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig, das heisst, es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ und so weiter.

Beispiel: Die Funktion

$$\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto r(x) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

hat die ersten und zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} -\frac{x_i x_j}{r^3} & \text{für } i \neq j, \\ \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} & \text{für } i = j. \end{cases}$$

9.6 Taylorentwicklung

Durch gleichzeitige Taylorentwicklung bezüglich jeder Variablen erhalten wir die *totale Taylorentwicklung von f* . Für zwei Variablen gilt zum Beispiel:

Satz: Die Taylorentwicklung vom Grad k einer k -mal stetig differenzierbaren Funktion $f(x, y)$ im Punkt (ξ, η) ist

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq k}} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(\xi, \eta) \cdot \frac{(x - \xi)^i}{i!} \cdot \frac{(y - \eta)^j}{j!} + o(|(x - \xi, y - \eta)|^k).$$

Beispiel: Die Taylorentwicklung vom Grad 3 von $e^{x+y} \cos x$ im Punkt $(0, 0)$ ist

$$e^{x+y} \cos x = 1 + (x + y) + \frac{2xy + y^2}{2} + \frac{-2x^3 + 3xy^2 + y^3}{6} + o(|(x, y)|^3).$$

Satz: Die Taylorentwicklung vom Grad 2 einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ im Punkt $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ist

$$f(x) = f(\xi) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \cdot (x - \xi)_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \cdot (x_i - \xi_i) \cdot (x_j - \xi_j) + o(|x - \xi|^2).$$

Die hier vorkommenden Summen kann man mit Hilfe des Matrixprodukts vereinfachen.

Definition: Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen heisst die *Hesse-Matrix von f* :

$$\nabla^2 f := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i, j=1..n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Wie bisher seien x und ξ und ∇f Zeilenvektoren, und sei $(x-\xi)^T$ der zu $x-\xi$ transponierte Spaltenvektor. Dann wird der obige Satz äquivalent zu:

Satz: Die Taylorentwicklung vom Grad 2 einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ im Punkt ξ ist

$$f(x) = f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot (x - \xi)^T + \frac{1}{2} \cdot (x - \xi) \cdot \nabla^2 f(\xi) \cdot (x - \xi)^T + o(|x - \xi|^2).$$

9.7 Lokale Extrema

Sei f jetzt auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n definiert.

Definition: Ein Punkt x mit $\nabla f(x) = (0, \dots, 0)$ heisst ein *kritischer Punkt* von f .

Satz: Ist f differenzierbar, so ist jede lokale Extremalstelle von f ein kritischer Punkt.

Definition: Ein kritischer Punkt x mit $\det \nabla^2 f(x) = 0$ heisst *ausgeartet*, andernfalls *nichtausgeartet*.

Satz: Ein nichtausgearteter kritischer Punkt x von f ist

- eine lokale Minimalstelle, falls $\nabla^2 f(x)$ positiv definit ist,
- eine lokale Maximalstelle, falls $\nabla^2 f(x)$ negativ definit ist,
- ein Sattelpunkt, sonst.

Beispiel: Die kritischen Punkte von $\cos(x + 2y) + \cos(2x + 3y)$ sind alle nichtausgeartet. Bis auf Addition von Vielfachen von 2π sind sie eine lokale Maximalstelle in $(0, 0)$, eine lokale Minimalstelle in (π, π) , und Sattelpunkte in $(0, \pi)$ und $(\pi, 0)$.

Wie im Fall einer Variablen hängt das lokale Verhalten in einem ausgearteten kritischen Punkt von den nächsten Termen in der Taylorentwicklung ab.

Beispiel: Die Funktion $x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0, 0)$ eine „Stufe“, die Funktion $x^2 + y^4$ ein lokales Minimum, und die Funktion $x^2 - y^4$ einen Sattelpunkt.

Beispiel: Zwei Partikel befinden sich an den Stellen $0 < x < y < 1$ des Intervalls $[0, 1]$ und unterliegen den Abstossungskräften

$$0 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{1}{x}} x \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{2}{y-x}} y \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{1}{1-y}} 1$$

Gibt es eine Gleichgewichtslage, und wenn ja, ist sie stabil? *Lösung:* Die potentielle Energie des Systems ist

$$E := -\log x - 2 \log(y - x) - \log(1 - y).$$

Da sich jedes physikalische System in die Richtung minimaler Gesamtenergie bewegt, ist jede mögliche Gleichgewichtslage ein kritischer Punkt von E . Der einzige kritische Punkt liegt bei $(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ und ist nichtausgeartet mit positiv definiten Hessematrix $8 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dort hat E also ein isoliertes lokales Minimum, die Gleichgewichtslage ist also stabil.

9.8 Globale Extrema

Betrachte nun eine stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$. Wir wissen bereits, dass f ein globales Minimum und ein globales Maximum hat. Wie im Fall einer Variablen unterscheiden wir, ob diese im Inneren X° oder auf dem Rand ∂X angenommen werden.

Fakt: Ist $f|_{X^\circ}$ differenzierbar, so ist jede globale Extremalstelle von f entweder ein kritischer Punkt von $f|_{X^\circ}$ oder eine globale Extremalstelle von $f|_{\partial X}$.

Um alle Extremalstellen von f zu finden, teilt man X auf in endlich viele Teile, welche jeweils durch offene Bereiche in \mathbb{R}^m für verschiedene $m \leq n$ parametrisiert werden, findet die kritischen Punkte der Einschränkung von f auf jeden dieser Teile, und vergleicht die Werte von f an allen so gefundenen Stellen.

Bleistift: Die globalen Extrema von $x^3 - 18x^2 + 81x + 12y^2 - 144y + 24xy$ auf dem Dreieck $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10\}$ sind das Maximum 260 im Punkt $(5, 5)$ und das Minimum -432 im Punkt $(0, 6)$.

9.9 Implizite Funktionen

Seien g_1, \dots, g_r differenzierbare Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ für ein $r < n$. Betrachte die gemeinsame Nullstellenmenge

$$B := \{x \in U \mid \forall i = 1 \dots r: g_i(x) = 0\}.$$

Wenn die Funktionen g_1, \dots, g_r in gewissem Sinn voneinander unabhängig sind, so reduziert jede Gleichung $g_i(x) = 0$ die ‘Zahl der freien Parameter’ um 1, und dann ist B eine Teilmenge der Dimension $n - r$. Genauer besagt die Differenzierbarkeit von g_i in einem Punkt $\xi \in B$, dass für alle $x \in B$ mit $x \rightarrow \xi$ gilt

$$\underbrace{g_i(x)}_{=0} = \underbrace{g_i(\xi)}_{=0} + \nabla g_i(\xi) \cdot (x - \xi) + o(|x - \xi|).$$

Mit anderen Worten gilt

$$\nabla g_i(\xi) \cdot \frac{x - \xi}{|x - \xi|} \rightarrow 0 \quad \text{für } B \ni x \rightarrow \xi.$$

Durch Grenzübergang erhalten wir:

Definition: Ein Punkt $\xi \in B$, in dem die Vektoren $\nabla g_1(\xi), \dots, \nabla g_r(\xi)$ linear unabhängig sind, heisst ein *regulärer Punkt von B*.

Definition/Satz: Der *Tangentenraum* von B in einem regulären Punkt $\xi \in B$ ist der $(n - r)$ -dimensionale affin-lineare Unterraum

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1 \dots r: \nabla g_i(\xi) \cdot (x - \xi) = 0\}.$$

Beispiel: Die Nullstellenmenge $K \subset \mathbb{R}^2$ der Funktion $g(x, y) := x^2 - y^2 - x^4$ ist eine liegende Acht mit Kreuzungspunkt $(0, 0)$. Ausserhalb dessen ist der Gradient $\nabla g = (2x - 4x^3, -2y)$ ungleich Null, also K eine reguläre Kurve. Im Ursprung hat K dagegen eine *Singularität*.

Beispiel: Die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist die Nullstellenmenge der Funktion $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Deren Gradient $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ ist überhalb auf S^2 ungleich Null. Also ist S^2 überall regulär der Dimension 2. Ihr Tangentialraum im Punkt $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2$ ist gegeben durch die Gleichung $2\xi(x - \xi) + 2\eta(y - \eta) + 2\zeta(z - \zeta) = 0$.

Beispiel: Die Nullstellenmenge $F \subset \mathbb{R}^3$ der Funktion $g(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$ ist ein bezüglich der z -Achse rotationssymmetrischer Doppelkegel mit Spitze im Ursprung. Ausserhalb des Ursprungs ist $\nabla g = (2x, 2y, -2z)$ ungleich Null, also F regulär. Im Ursprung hat F dagegen eine Singularität.

Beispiel: Die gemeinsame Lösungsmenge $C \subset \mathbb{R}^3$ der beiden Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ ist eine überall reguläre Kurve.

In der Nähe jedes regulären Punktes lässt sich B als Graph einer Funktion beschreiben, wofür man eine geeignete Aufteilung der Variablen in abhängige und unabhängige wählen muss. Wir geben nur den Fall $r = 1$ an:

Satz: Sei $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^k -Funktion für $k \geq 1$ und eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1})$ ein Punkt der Nullstellenmenge $G := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ mit $\frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(\xi) \neq 0$. Dann existieren eine offene Teilmenge der Form $V \times I \subset U$, welche ξ enthält, und eine C^k -Funktion $\varphi: V \rightarrow I$, so dass $\text{graph}(\varphi) = G \cap (V \times I)$ ist. Für diese gilt also $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_{n+1}$, und für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\xi_1, \dots, \xi_n) = -\frac{\partial g}{\partial x_i}(\xi) / \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(\xi).$$

Beispiel: Die Nullstellenmenge G von $g(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ enthält genau zwei Punkte, in denen $\frac{\partial g}{\partial y}$ verschwindet, nämlich $(0, 0)$ und $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Ausserhalb dieser ist G also lokal der Graph einer beliebig oft differenzierbaren Funktion. Genauer sind die maximalen Zweige von G , welche solche Graphen sind, die Teilmengen

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in G \mid x < 0\}, \\ &\{(x, y) \in G \mid x > 0 \text{ und } y < 0\}, \\ &\{(x, y) \in G \mid 0 < x < \sqrt[3]{4} \text{ und } 0 < y < \sqrt{x}\}, \\ &\{(x, y) \in G \mid 0 < x < \sqrt[3]{4} \text{ und } y > \sqrt{x}\}. \end{aligned}$$

Der Punkt $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ liegt auf dem letztgenannten Zweig, und die Ableitung der dortigen impliziten Funktion φ ist $\frac{d\varphi}{dx}(\frac{2}{3}) = -\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) / \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = -(-\frac{8}{3}) / \frac{10}{3} = \frac{4}{5}$.

Beispiel: Die Gleichung $g(x, y) := (1 + x + y) \cdot e^{x^2+y^2} - 1 = 0$ lässt sich nach keiner Variablen elementar auflösen. Auf ihrer Nullstellenmenge G gilt aber überall $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$ und

$\frac{\partial g}{\partial x} > 0$. Somit ist G überall lokal der Graph einer beliebig oft differenzierbaren Funktion mit Ableitung < 0 . Man kann ausserdem zeigen, dass die Gleichung für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung in y hat und umgekehrt. Also ist G selbst der Graph einer streng monoton fallenden bijektiven beliebig oft differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

9.10 Extrema mit Nebenbedingungen

Sucht man die Extrema einer Funktion f auf der durch die Gleichung $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ beschriebenen Teilmenge von \mathbb{R}^n , so kann man versuchen, die Gleichung nach einer Variablen aufzulösen und die resultierende Formel in f einzusetzen, um das Problem auf ein Problem niedrigerer Dimension zu reduzieren. Wenn man die Gleichung aber nicht explizit auflösen kann oder die Formeln kompliziert werden, bietet sich die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren* an. Damit kann man oft auch lästige Fallunterscheidungen vermeiden.

Seien f und g_1, \dots, g_r differenzierbare Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ für ein $r < n$ und sei

$$B := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}.$$

Definition: Ein regulärer Punkt x von B , bei dem $\nabla f(x)$ eine Linearkombination von $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$ ist, heisst *bedingt kritischer Punkt von f auf B* .

Satz: Jede reguläre lokale Extremalstelle von $f|_B$ ist ein bedingt kritischer Punkt.

Satz: Ein regulärer Punkt $x \in B$ ist ein bedingt kritischer Punkt von f mit $\nabla f(x) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_r \cdot \nabla g_r(x)$ genau dann, wenn $(x, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ein kritischer Punkt der *Lagrange'schen Hilfsfunktion*

$$F: (x, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto f(x) - \lambda_1 \cdot g_1(x) - \dots - \lambda_r \cdot g_r(x)$$

ist, das heisst, wenn die folgenden Gleichungen gelten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n \text{ und} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \quad \quad \quad -g_j \quad \quad \quad = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq r. \end{array} \right\}$$

Beispiel: Für gegebenes $s > 0$ bestimme das Maximum von $f(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$ auf der Menge

$$B := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{alle } x_i \geq 0 \text{ und } x_1 + \dots + x_n = s\}.$$

Lösung: Da $f|_B$ verschwindet, wenn eine der Koordinaten Null ist, und sonst positiv ist, nimmt $f|_B$ sein Maximum in einem Punkt mit allen $x_i > 0$ an. Dies ist dann ein bedingt kritischer Punkt von f unter der Nebenbedingung $g(x) := x_1 + \dots + x_n - s = 0$. Nach Lagrange bedeutet dies

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} - \lambda = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \text{ und} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \quad \quad \quad -g = s - x_1 - \dots - x_n = 0, \end{array} \right\}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus den ersten n Gleichungen folgt, dass alle x_i gleich sind. Aus der letzten Gleichung folgt dann $x_1 = \dots = x_n = \frac{s}{n}$. Als einziger bedingt kritischer Punkt ist dies also die eindeutige globale Maximalstelle von $f|_B$. Der Wert des Maximums ist $f(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}) = (\frac{s}{n})^n$. Insbesondere gilt somit $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n \leq (\frac{x_1 + \dots + x_n}{n})^n$ für alle $x_1, \dots, x_n \geq 0$, oder mit anderen Worten:

Folge: Für alle $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

das heisst, das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.

Beispiel: Die Extrema von $f(x, y, z) := -\sqrt{3}x + 3y + 2z$ auf der Einheitssphäre $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sind gleich ± 4 in den Punkten $\pm \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{3}, 3, 2)$.

Beispiel: Die Teilmenge $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } 5x + 4y + 3z = 0\}$ ist eine überall reguläre Kurve. Die Extrema von $f(x, y, z) := x$ darauf sind gleich $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ und werden angenommen in dem jeweils einzigen Punkt $\pm \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot (5, -4, -3)$.

9.11 Vektorwertige Funktionen

Für vektorwertige Funktionen von mehreren Variablen müssen wir in den sauren Apfel beissen und klarer als bisher zwischen Zeilenvektoren und Spaltenvektoren unterscheiden. Wo nichts anderes gesagt, benutzen wir von jetzt an *Spaltenvektoren*. Ein Ortsvektor wird in der Regel ein Spaltenvektor sein. Der Gradient einer differenzierbaren skalarwertigen Funktion bleibt allerdings ein Zeilenvektor.

Betrachte für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : X \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Definition: Die Funktion f heisst *k-mal differenzierbar*, beziehungsweise *k-mal stetig differenzierbar*, wenn jede Komponentenfunktion f_i es ist.

Definition: Ist f differenzierbar, so heisst die Matrix der partiellen Ableitungen

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

die *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* von f . Die Zeilen dieser Matrix sind genau die Gradienten ∇f_i der Komponentenfunktionen.

Die Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $\xi \in X$ bedeutet dann, dass für $x \rightarrow \xi$ gilt

$$f(x) = f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot (x - \xi) + o(|x - \xi|).$$

Vorsicht: Die Jacobi-Matrix ∇f einer vektorwertigen Funktion f sollte man nicht verwechseln mit der Hesse-Matrix $\nabla^2 f$ einer skalarwertigen Funktion f .

Beispiel: Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ und jede $m \times n$ -Matrix A ist die affin lineare Funktion

$$\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto v + A \cdot x$$

differenzierbar mit $\nabla \ell = A$. Insbesondere ist die Identitätsfunktion

$$\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x$$

differenzierbar und ∇id ist die Einheitsmatrix.

Definition: Eine differenzierbare Funktion f heisst *regulär* in einem Punkt $\xi \in X$, wenn der Rang der Matrix $\nabla f(\xi)$ den maximal möglichen Wert $\min\{m, n\}$ annimmt.

Spezialfall: Im Fall $m \leq n$ ist f regulär in ξ genau dann, wenn die m Zeilen $\nabla f_i(\xi)$ von $\nabla f(\xi)$ linear unabhängig sind. In diesem Fall ist die Niveaumenge $B := \{x \in X \mid f(x) = f(\xi)\}$ regulär der Dimension $n - m$ in der Nähe von ξ .

Spezialfall: Im Fall $m = 1$ ist f regulär in ξ genau dann, wenn der Zeilenvektor $\nabla f(\xi)$ nicht verschwindet, das heisst, wenn ξ kein kritischer Punkt von f ist. Die Niveaumenge ist dann regulär der Dimension $n - 1$ in der Nähe von ξ . Mit dem Satz über implizite Funktionen kann man sie nach einer geeigneten Vertauschung der Variablen lokal als Graph einer Funktion schreiben.

Spezialfall: Im Fall $m \geq n$ ist f regulär in ξ genau dann, wenn die n Spalten von $\nabla f(\xi)$ linear unabhängig sind. In diesem Fall ist f lokal injektiv mit glatter Bildmenge der Dimension n .

Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist regulär ausserhalb von $t = 0$. Ihre Bildmenge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|^{2/3} \right\}$ hat im Punkt $f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Singularität und ist sonst eine reguläre Kurve. Das Entsprechende gilt für das Bild der dazu ähnlichen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$. Das Bild von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ ist dagegen überall regulär.

Beispiel: Das Bild der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

ist eine Schraubenfläche mit Ganghöhe 2π . Die Funktionalmatrix von f ist

$$\nabla f \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und hat überall Rang 2. Tatsächlich ist die Bildmenge überall glatt.

Satz (Kettenregel): Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ differenzierbare Funktionen für Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ und $Z \subset \mathbb{R}^\ell$. Dann ist die Komposition $g \circ f: X \rightarrow Z$ differenzierbar und es gilt

$$\nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot \nabla f(x).$$

Sind f und g sogar k -mal differenzierbar, beziehungsweise k -mal stetig differenzierbar, so auch $f \circ g$.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten sind für geeignete Definitions- und Zielbereiche ausserhalb des Ursprungs gegeben durch die zueinander inversen Funktionen

$$f: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg(x+iy) \end{pmatrix}.$$

Deren Funktionalmatrizen sind

$$\nabla f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Da die Kompositionen $g \circ f$ und $f \circ g$ gleich der identischen Funktion sind, gilt nach der Kettenregel überall $\nabla g \cdot \nabla f = \nabla \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\nabla f \cdot \nabla g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dies kann man auch direkt anhand der gegebenen Formeln nachrechnen.

9.12 Invertierbare Funktionen

Jetzt betrachten wir den Spezialfall $n = m$.

Satz: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine C^k -Funktion für $k \geq 1$ und offene Teilmengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$.

- (a) Ist f invertierbar und die inverse Funktion $g := f^{-1}: Y \rightarrow X$ differenzierbar, so ist für alle $x \in X$ die Funktionalmatrix $\nabla f(x)$ invertierbar und es gilt $\nabla g(f(x)) = \nabla f(x)^{-1}$. Ausserdem ist g dann ebenfalls C^k .
- (b) Sei $\nabla f(\xi)$ invertierbar in einem Punkt $\xi \in X$, und setze $\eta := f(\xi) \in Y$. Dann existieren offene Teilmengen $\xi \in U \subset X$ und $\eta \in V \subset Y$, so dass die Einschränkung von f eine bijektive Funktion $U \rightarrow V$ ist, deren Umkehrfunktion die Eigenschaften in (a) erfüllt.

Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ hat in reellen Koordinaten $x + iy$ die Gestalt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ und somit die Funktionalmatrix $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ und die Funktionaldeterminante $4(x^2 + y^2)$. Also ist f ausserhalb von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal invertierbar mit beliebig oft differenzierbarer Umkehrfunktion. Die lokalen Umkehrfunktionen passen aber nicht zusammen zu einer globalen Inversen. Dasselbe gilt für die Abbildung $z \mapsto z^d$ für jede ganze Zahl $d \geq 2$.

Definition: Die Determinante der Funktionalmatrix $\det \nabla f$ heisst die *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante* von f .

Die Funktionalmatrix ∇f ist also invertierbar genau dort, wo die Funktionaldeterminante ungleich Null ist.

Geometrische Interpretation: Betrachte einen Punkt $\xi \in X$. Seien v_1, \dots, v_n die Spalten von $\nabla f(\xi)$. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{R}^n , und sei $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ mit kleinem Betrag $|h|$. Die Definition der Differenzierbarkeit impliziert dann

$$\begin{aligned} f(\xi + h_i e_i) &= f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot h_i e_i + o(|h_i e_i|) \\ &= f(\xi) + h_i v_i + o(|h|). \end{aligned}$$

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ der achsenparallele Quader mit einer Ecke ξ und den Kantenvektoren $h_1 e_1, \dots, h_n e_n$. Sein Bild $f(Q)$ ist dann näherungsweise ein Raumspace mit einer Ecke $f(\xi)$ und den Kantenvektoren $h_1 v_1, \dots, h_n v_n$. Die Funktionalmatrix $\nabla f(\xi)$ gibt also an, wie der Raum nahe ξ durch f verzerrt wird. Weiter ist das Volumen des Quaders gleich $|h_1 \cdots h_n|$ und das Volumen des Raumspace gleich

$$|\det(h_1 v_1, \dots, h_n v_n)| = |\det \nabla f(\xi)| \cdot |h_1 \cdots h_n|.$$

Allgemeiner gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{vol}(f(K)) = (|\det \nabla f(\xi)| + o(1)) \cdot \text{vol}(K),$$

wobei der Term $o(1)$ gegen Null geht für alle $K \subset B_\varepsilon(\xi)$ und $\varepsilon \rightarrow 0$. Im Grenzwert ist also $|\det \nabla f(\xi)|$ der lokale Volumenfaktor von f bei ξ .

Beispiel: Die Funktion $f: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ bildet jedes kleine achsenparallele Rechteck auf einen Sektor eines Kreisrings ab. Die Länge des jeweiligen Kreisabschnitts ist dabei gleich r mal die entsprechende Seitenlänge des Rechtecks. Der Flächeninhalt des Bildes wird also gegenüber dem Flächeninhalt des Rechtecks um den Faktor r gestreckt. In der Tat ist die Funktionaldeterminante von f gleich

$$\det \nabla f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

10 Integralrechnung mehrerer Variablen

10.1 Mehrdimensionales Riemann-Integral

Das Riemann-Integral in beliebiger Dimension wird ähnlich konstruiert wie in Dimension 1. Zunächst beachten wir:

Fakt: Jede hinreichend gutartige (zum Beispiel jede offene oder abgeschlossene beschränkte) Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ besitzt ein *n-dimensionales Volumen* $\text{vol}_n(X) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$. Im Fall $n = 1$ ist dies die Länge von X , im Fall $n = 2$ der Flächeninhalt, im Fall $n = 3$ das übliche Volumen. Es hat die folgenden Eigenschaften:

- Es ist invariant unter Translationen, Drehungen, und Spiegelungen.
- Es gilt $\text{vol}_{m+n}(X \times Y) = \text{vol}_m(X) \cdot \text{vol}_n(Y)$ für alle gutartigen $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$.
- Es gilt $\text{vol}_n(X \cup Y) = \text{vol}_n(X) + \text{vol}_n(Y) - \text{vol}_n(X \cap Y)$ für alle gutartigen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$.
- Es gilt $\text{vol}_n(X) = 0$ für alle $X \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $< n$.
- Es gilt $\text{vol}_n(X) \leq \text{vol}_n(Y)$ für alle gutartigen $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$.

Wenn die Dimension n aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir auch kurz $\text{vol}(X)$.

Beispiel: Ein n -dimensionaler Quader mit den Seitenlängen a_1, \dots, a_n hat das Volumen $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

Beispiel: Die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}$$

ist die Vereinigung eines Zylinders mit Radius 1 und Höhe 1 und einer Halbkugel mit Radius 1, hat also Volumen $\pi \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Definition: Der *Durchmesser* einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$\sup\{|x - y| : x, y \in X\}.$$

Sei f eine Funktion auf einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definition: Eine *Zerlegung* \mathcal{Z} von X ist eine Zerlegung in endlich viele zueinander disjunkte Teilmengen $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_r$ zusammen mit der Wahl eines Punkts $x_i \in X_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Die *Feinheit* der Zerlegung \mathcal{Z} ist das Maximum der Durchmesser aller X_i . Die *Riemann-Summe* von f bezüglich der Zerlegung \mathcal{Z} ist

$$S_f(\mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^r f(x_i) \cdot \text{vol}_n(X_i).$$

Definition: Die Riemann-Summe $S_f(\mathcal{Z})$ hat den Grenzwert I für $\rho(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } X: \rho(\mathcal{Z}) < \delta \implies |S_f(\mathcal{Z}) - I| < \varepsilon.$$

Falls der Grenzwert existiert, so ist er eindeutig bestimmt. Dann nennen wir f (*Riemann-*) *integrierbar* und den Grenzwert

$$\int_X f \, d\text{vol}_n := \int_X f(x) \, d\text{vol}_n(x) := I$$

das *Integral von f über X* .

Notation: Anstatt $d\text{vol}_n$ oder $d\text{vol}$ schreibt man oft auch $d\mu$, oder dF in Dimension 2, oder dV in Dimension 3. Dagegen schreiben wir für dieses mehrdimensionale Integral nicht dx , da das in einem anderen Sinn benutzt wird.

Fakt: Für jede integrierbare Funktion f auf $[a, b]$ gilt

$$\int_{[a,b]} f \, d\text{vol}_1 = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Satz: Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

10.2 Eigenschaften

Fakt: Für alle auf den angegebenen Teilmengen integrierbare Funktionen f und g gilt:

$$\begin{aligned} \int_X 1 \, d\text{vol} &= \text{vol}(X). \\ \int_{X \cup Y} f \, d\text{vol} &= \int_X f \, d\text{vol} + \int_Y f \, d\text{vol} && \text{falls } X \cap Y \text{ Dimension } < n \text{ hat.} \\ \int_X (f + g) \, d\text{vol} &= \int_X f \, d\text{vol} + \int_X g \, d\text{vol}. \\ \int_X \lambda f \, d\text{vol} &= \lambda \cdot \int_X f \, d\text{vol} && \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{R}. \\ \int_X f \, d\text{vol} &= \int_X g \, d\text{vol} && \text{falls } f = g \text{ ist ausserhalb einer Teilmenge der Dimension } < n. \\ \int_X f \, d\text{vol} &\leq \int_X g \, d\text{vol} && \text{falls } \forall x \in X: f(x) \leq g(x). \\ \left| \int_X f \, d\text{vol} \right| &\leq \int_X |f| \, d\text{vol}. \end{aligned}$$

Satz (Fubini): Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in X$, und f eine integrierbare Funktion auf der Menge

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}.$$

Dann gilt

$$\int_Z f(z) \, d\text{vol}_{n+1}(z) = \int_X \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dy \right) \, d\text{vol}_n(x).$$

Folge: Speziell gilt in der obigen Situation

$$\text{vol}_{n+1}(Z) = \int_X (\psi - \varphi) d\text{vol}_n.$$

Mit dem Satz von Fubini kann man jedes mehrdimensionale Integral als Schachtelung eindimensionaler Integrale berechnen. Da das Integral ausserdem unter Vertauschung der Variablen invariant ist, kann man sich die Reihenfolge der Zerlegung beliebig herausuchen, damit die Rechnung möglichst einfach wird.

Beispiel: Für alle $a, b \geq 1$ gilt:

$$\int_{[1,a] \times [1,b]} \frac{1}{(x+y)^2} d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_1^a \int_1^b \frac{1}{(x+y)^2} dy dx = \int_1^a \left(\frac{-1}{x+b} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \log \frac{(a+1)(b+1)}{2(a+b)}.$$

Beispiel:

$$\int_{[0,\pi]^3} \sin(x+y+z) d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y+z) dz dy dx = -8.$$

Beispiel: Bestimme das Integral von xy^2 über den Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ zwischen der Parabel $x = y^2$ und der Geraden $x = 4$. *Lösung:* Je nachdem, ob wir zuerst nach x oder nach y auflösen, lautet die Rechnung

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x} \right\},$$

$$\int_B xy^2 d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^4 \frac{2}{3} x^{5/2} dx = \frac{512}{21},$$

oder

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4 \right\},$$

$$\int_B xy^2 d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{-2}^2 \left(\int_{y^2}^4 xy^2 dx \right) dy = \int_{-2}^2 \left(8y^2 - \frac{y^6}{2} \right) dy = \frac{512}{21}.$$

Vorsicht: Beim Beschreiben eines Integrationsbereichs in der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}$$

muss man darauf achten, dass tatsächlich überall $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ist, da sonst das Teilintegral $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x) dy$ falsche Werte liefert.

Beispiel:

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y) dx dy = \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y) dy dx.$$

Manchmal ist es besser, den Integrationsbereich aufzuteilen:

Beispiel: Das Integral über den von der Geraden $x + y = 0$ und der Parabel $x^2 + y = 2$ eingeschlossenen Bereich ist

$$\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) dy dx = \int_{-2}^1 \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx dy.$$

10.3 Substitution

Betrachte kompakte Teilmengen $X, \tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$, welche ausserhalb gewisser Teilmengen der Dimension $< n$ eine Bijektion induziert. In Abschnitt 9.12 hatten wir gesehen, dass $|\det \nabla \varphi|$ der lokale Volumenfaktor von f ist.

Satz: Für jede integrierbare Funktion f auf X ist $(f \circ \varphi) \cdot |\det \nabla \varphi|$ integrierbar und es gilt

$$\int_X f(x) d\text{vol}(x) = \int_{\tilde{X}} f(\varphi(\tilde{x})) \cdot |\det \nabla \varphi(\tilde{x})| d\text{vol}(\tilde{x}).$$

Bemerkung: Im Spezialfall $n = 1$ mit Intervallen $X = [a, b]$ und $\tilde{X} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ besagt die obige Formel

$$\int_{[a,b]} f(x) d\text{vol}_1(x) = \int_{[\tilde{a},\tilde{b}]} f(\varphi(\tilde{x})) \cdot |\varphi'(\tilde{x})| d\text{vol}_1(\tilde{x}),$$

während die Substitutionsformel aus Abschnitt 7.6 besagt

$$\int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} f(x) dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\varphi(\tilde{x})) \cdot \varphi'(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Trotz, oder gerade wegen, der Betragsstriche sind diese Formeln äquivalent. Denn für φ monoton wachsend gilt $\varphi' \geq 0$ und $\varphi(\tilde{a}) = a$ und $\varphi(\tilde{b}) = b$, und die Formeln sind direkt gleich. Andernfalls ist φ monoton fallend und somit $\varphi' \leq 0$ und $\varphi(\tilde{a}) = b$ und $\varphi(\tilde{b}) = a$. Dann entspricht der Vorzeichenunterschied auf der rechten Seite der Richtungsumkehr $\varphi(\tilde{a}) > \varphi(\tilde{b})$ auf der linken Seite. Man kann dies so ausdrücken, dass das Integrationselement dx eine Orientierung besitzt, das Volumenelement $d\text{vol}_1$ nicht.

Spezialfall: Sei φ eine affin-lineare Abbildung $\tilde{x} \mapsto v + A\tilde{x}$ für einen festen Vektor v und eine feste invertierbare $n \times n$ -Matrix A . Dann gilt

$$\int_{\varphi(\tilde{X})} f(x) d\text{vol}(x) = \int_{\tilde{X}} f(v + A\tilde{x}) \cdot |\det A| d\text{vol}(\tilde{x}).$$

Insbesondere ist das Integral invariant unter allen affin-linearen Koordinatentransformationen mit Determinante ± 1 , darunter allen Translationen, Drehungen, und Spiegelungen.

Spezialfall: Die Abbildung

$$f: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

der ebenen Polarkoordinaten erfüllt die Voraussetzungen des Satzes. Wegen $\det \nabla f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = r$ gilt also

$$\int_{f(\tilde{X})} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\tilde{X}} g(f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) \cdot r d\text{vol} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix},$$

oder anders gesagt

$$\iint_{f(\tilde{X})} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy = \iint_{\tilde{X}} g(f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) \cdot r dr d\varphi.$$

Beispiel: Für $\tilde{X} := [0, R] \times [0, 2\pi]$ ist $f(\tilde{X}) = \bar{B}_R(0)$ eine Kreisscheibe mit Radius R und dem Flächeninhalt

$$\text{vol}(\bar{B}_R(0)) = \int_{\bar{B}_R(0)} 1 d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\tilde{X}} r d\text{vol} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

Spezialfall: Die Abbildung

$$f: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

der Kugelkoordinaten erfüllt die Voraussetzungen des Satzes. Wegen $\det \nabla f \left(\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \right) = r^2 \cos \vartheta$ gilt also

$$\int_{f(\tilde{X})} g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_{\tilde{X}} g(f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix}) \cdot r^2 \cos \vartheta d\text{vol} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix},$$

oder anders gesagt

$$\iiint_{f(\tilde{X})} g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dx dy dz = \iiint_{\tilde{X}} g(f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix}) \cdot r^2 \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Beispiel: Das Volumen einer Kugel mit Radius R ist $\frac{4\pi}{3} R^3$.

Beispiel: Das Volumen einer 4-dimensionalen Kugel mit Radius R ist $\frac{\pi^2}{2} R^4$.

10.4 Rotationskörper

Definition: Wenn man eine gegebene Teilmenge des \mathbb{R}^3 um eine Gerade rotieren lässt und die Vereinigung nimmt, erhält man einen *Rotationskörper*. Ist die Gerade die z -Achse, so ist der Rotationskörper also eine Menge der Gestalt

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \in B, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$.

Fakt: Ein Integral über einen solchen Rotationskörper kann man durch Substitution mit Polarkoordinaten und dem Satz von Fubini wie folgt umformen:

$$\int_X f\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right) d\text{vol}_3\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right) = \int_B \left(\int_0^{2\pi} f\left(\begin{matrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{matrix}\right) d\varphi \right) \cdot \rho d\text{vol}_2\left(\begin{matrix} \rho \\ z \end{matrix}\right).$$

Ist auch f invariant unter Rotation um die z -Achse, so vereinfacht sich letzteres zu

$$\int_B f\left(\begin{matrix} \rho \\ 0 \\ z \end{matrix}\right) \cdot 2\pi\rho d\text{vol}_2\left(\begin{matrix} \rho \\ z \end{matrix}\right).$$

Beispiel: Für $R > r > 0$ ist die Menge

$$T := \left\{ \left(\begin{matrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{matrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid (\rho - R)^2 + z^2 \leq r^2, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

ein Torus der Dicke $2r$ mit einem Kreis vom Radius R als Mittellinie. Sein Volumen erhalten wir aus der obigen Formel für die konstante Funktion $f \equiv 1$. Wir berechnen es am besten durch eine abermalige Substitution mit Polarkoordinaten in der Form $\begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cos \vartheta + R \\ \sigma \sin \vartheta \end{pmatrix}$ mit $d\rho dz = \sigma d\vartheta d\sigma$:

$$\int_{(\rho-R)^2+z^2 \leq r^2} 2\pi\rho d\text{vol}_2\left(\begin{matrix} \rho \\ z \end{matrix}\right) = \int_0^r \int_0^{2\pi} 2\pi(\sigma \cos \vartheta + R) \cdot \sigma d\vartheta d\sigma = \int_0^r 4\pi^2 R \sigma d\sigma = 2\pi^2 R r^2.$$

Spezialfall: Sei

$$X = \left\{ \left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b], \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z) \right\}$$

für eine stetige Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Dann ist

$$\int_X f\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right) d\text{vol}_3\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right) = \int_a^b \int_0^{g(z)} \int_0^{2\pi} f\left(\begin{matrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{matrix}\right) d\varphi \cdot \rho d\rho dz,$$

im Falle eines rotationsinvarianten f also gleich

$$\int_a^b \int_0^{g(z)} f\left(\begin{matrix} \rho \\ 0 \\ z \end{matrix}\right) \cdot 2\pi\rho d\rho dz.$$

Insbesondere ist das Volumen von X in diesem Fall gleich

$$\text{vol}_3(X) = \int_a^b \int_0^{g(z)} 2\pi\rho d\rho dz = \int_a^b \pi g(z)^2 dz.$$

Beispiel: Der Rotationskörper zu der Funktion $g: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $z \mapsto \frac{Rz}{h}$ ist ein auf der Spitze stehender Kegel der Höhe h und Radius R . Sein Volumen ist

$$\int_0^h \pi \left(\frac{Rz}{h}\right)^2 dz = \frac{\pi R^2 z^3}{3h^2} \Big|_{z=0}^{z=h} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

10.5 Anwendung: Physikalische Grössen

Masse: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Körper mit einer Massenverteilung, welche durch eine integrierbare Funktion $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist. Dann ist die Gesamtmasse von X gleich

$$m(X) := \int_X \mu(x) \, d\text{vol}_n(x).$$

Ein homogener Körper mit konstanter Massendichte μ hat also Gesamtmasse $\mu \cdot \text{vol}_n(X)$.

Schwerpunkt: Der Schwerpunkt von X ist der durch die Massenverteilung gewichtete Durchschnitt der Ortsvektoren. Dieser ist nur definiert, wenn die Gesamtmasse $m(X)$ grösser als Null ist, und ist dann gleich

$$S(X) := m(X)^{-1} \cdot \int_X x \cdot \mu(x) \, d\text{vol}_n(x).$$

Der Integrand ist hier zwar eine vektorwertige Funktion, das Integral kann man aber komponentenweise berechnen.

Beispiel: Die homogene Halbkreisscheibe vom Radius R

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

hat den Schwerpunkt $\begin{pmatrix} 4R/3\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Trägheitsmoment: Das Trägheitsmoment eines Körpers $X \subset \mathbb{R}^3$ ist der Widerstand, den er einer ihn in eine Drehung um eine gegebene Achse L versetzende Kraft entgegensetzt. Für eine Punktmasse im Punkt P ist es gleich der Masse mal dem Quadrat des Abstands von P zu L . Im allgemeinen muss dieser Wert mit der Massenverteilung über X integriert werden. Zum Beispiel ist das Trägheitsmoment von X bezüglich der z -Achse gleich

$$\Theta_z(X) := \int_X \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot (x^2 + y^2) \, d\text{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Eine Kugel vom Radius $R > 0$ mit konstanter Massendichte μ hat das Volumen $\frac{4\pi}{3}R^3$ und somit die Gesamtmasse $\frac{4\pi}{3}\mu R^3$. Aus Symmetriegründen liegt ihr Schwerpunkt im Mittelpunkt. Ebenfalls aus Symmetriegründen ist ihr Trägheitsmoment bezüglich jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden gleich. Wir berechnen es mittels Polarkoordinaten zu $\frac{8\pi}{15}\mu R^5$.

Dass Volumen und Masse proportional zu R^3 sind und das Trägheitsmoment proportional zu R^5 , gilt auch allgemeiner:

Skalierung: Entsteht der Körper $Y \subset \mathbb{R}^3$, indem ein gegebener Körper $X \subset \mathbb{R}^3$ in alle Richtungen gleichmässig um den Faktor $\lambda > 0$ gestreckt oder gestaucht wird, so gilt

$\text{vol}_3(Y) = \lambda^3 \cdot \text{vol}_3(X)$. Haben ausserdem X und Y dieselbe konstante Massendichte μ , so gilt $\Theta_z(Y) = \lambda^5 \cdot \Theta_z(X)$.

Schon ein Grössenunterschied von 10% mit dem Streckungsfaktor $\lambda = 1.1$ führt also zu dem Faktor $\lambda^5 = 1.61051$ für das Trägheitsmoment, einem Unterschied von über 60%. Ein Grössenunterschied von 25% mit dem Streckungsfaktor $\lambda = 1.25$ führt zu dem Faktor $\lambda^5 \approx 3.0518$ für das Trägheitsmoment; das ist mehr als das Dreifache.

Gravitation: Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz übt eine Punktmasse m an der Stelle P im \mathbb{R}^3 auf eine Punktmasse m_0 an der Stelle $P_0 \neq P$ im \mathbb{R}^3 eine Anziehungskraft vom Betrag $\frac{Gmm_0}{|P-P_0|^2}$ aus, wobei G die universelle Gravitationskonstante ist. Die Richtung dieser Anziehungskraft ist $P - P_0$, der entsprechende Kraftvektor ist also $Gmm_0 \cdot \frac{P-P_0}{|P-P_0|^3}$. Die von ganz X auf P_0 ausgeübte Anziehungskraft erhalten wir, indem wir diesen Wert mit der Massenverteilung über X integrieren

$$F := \int_X Gm_0 \cdot \mu(P) \cdot \frac{P - P_0}{|P - P_0|^3} d\text{vol}_3(P).$$

Für die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern X und Y muss man dies nochmal über $P_0 \in Y$ mit der Massenverteilung von Y integrieren.

Beispiel: Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugelschale mit dem inneren Radius $R_1 \geq 0$ (im Fall $R_1 = 0$ also eine Vollkugel) und dem äusseren Radius $R_2 > R_1$ sowie der konstanten Massendichte μ . Dann ist ihre Gesamtmasse gleich $m(X) := \frac{4\pi}{3}\mu(R_2^3 - R_1^3)$. Gegeben sei weiter eine Punktmasse m_0 im Punkt $P_0 \notin X$. Aus Symmetriegründen wirkt dann die Anziehungskraft von X auf P_0 in Richtung des Mittelpunkts M von X .

Fakt: Liegt P_0 ausserhalb von X , so ist die Anziehungskraft von X auf P_0 gleich derjenigen, die eine Punktmasse $m(X)$ an der Stelle M auf P_0 ausübt. Liegt P_0 innerhalb von X , so ist die Anziehungskraft von X auf P_0 gleich Null.

Für die klassische Himmelsmechanik ist es also berechtigt, Planeten und Sterne wie Punktmassen zu behandeln. Dasselbe Ergebnis gilt für elektrostatische Felder und zeigt dort, dass das Feld im Innern eines kugelförmigen Faradayschen Käfigs verschwindet.

10.6 Uneigentliches Integral

Sei nun $X \subset \mathbb{R}^n$ eine hinreichend gutartige (zum Beispiel offene) nicht kompakte Teilmenge. Sei f eine Funktion auf X , so dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ das Integral $\int_K f d\text{vol}$ existiert.

Definition: Wir sagen, dass $\int_K f d\text{vol}$ für wachsendes K den Grenzwert I hat, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_0 \subset X$ existiert, so dass für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$, welche K_0 enthalten, gilt:

$$\left| \int_K f d\text{vol} - I \right| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heisst I das *uneigentliche Integral von f über X* und wird ebenfalls bezeichnet mit

$$\int_X f \, d\text{vol} = \int_X f(x) \, d\text{vol}(x).$$

Fakt: Ist f stetig, so existiert das uneigentliche Integral $\int_X f \, d\text{vol}$ genau dann, wenn die Werte $\int_K |f| \, d\text{vol}$ für alle K nach oben beschränkt sind (absolute Konvergenz). Dabei kann man sich auf kompakte Teilmengen beschränken, welche die Menge X ausschöpfen.

Bemerkung: Wie üblich schreiben wir auch $\int_X f \, d\text{vol} = \infty$ oder $= -\infty$, wenn $\int_K f \, d\text{vol}$ den *uneigentlichen Grenzwert* $\pm\infty$ hat.

Fakt: Gilt überall $f \geq 0$ oder überall $f \leq 0$, so existiert $\int_X f \, d\text{vol}$ oder es ist gleich $\pm\infty$. Ausserdem gelten dann alle bisherigen Regeln, insbesondere der Satz von Fubini und die Substitutionsregel, auch für das uneigentliche Integral.

Beispiel: Für jede reelle Zahl s gilt

$$\int_{[1,\infty[\times [1,\infty[} \frac{1}{(x+y)^s} \, d\text{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{2^{2-s}}{(s-1)(s-2)} & \text{falls } s > 2 \text{ ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Beispiel: Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, d\text{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2.$$

Wenn wir dagegen zuerst mit Polarkoordinaten substituieren, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, d\text{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi = \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r \, dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Insgesamt folgt daraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

10.7 Kurvenintegral

Definition: Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion, welche ausserhalb endlich vieler Punkte injektiv ist. Dann nennen wir das Bild $C := \text{image}(\gamma)$ zusammen mit γ eine *parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^n* . Oft nennt man die *Parametrisierung* γ nicht explizit, obwohl sie im Hintergrund vorhanden sein muss. Für $C \subset U \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir C auch eine *Kurve in U* .

Umparametrisierung: Für jede bijektive C^1 -Funktion $\psi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ist die Funktion $\gamma \circ \psi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow C$ eine weitere Parametrisierung derselben Kurve.

Bemerkung: Wegen $\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + \gamma'(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ bildet γ ein kleines Intervall $[t, t + \Delta t]$ näherungsweise auf eine Strecke der Länge $|\gamma'(t)| \cdot \Delta t$ ab. Wenn wir entlang der

Kurve integrieren wollen, müssen wir den Integranden daher mit dem lokalen Streckungsfaktor $|\gamma'(t)|$ gewichten. Wir definieren also:

Definition: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow C$, und sei f eine Funktion auf C . Dann heisst

$$\int_C f \, d\text{vol}_1 := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt$$

das *Kurvenintegral von f über C* , sofern es existiert.

Satz: Das Kurvenintegral ist invariant unter Umparametrisierung, das heisst, für jedes ψ wie oben gilt

$$\int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\psi(\tilde{t}))) |(\gamma \circ \psi)'(\tilde{t})| \, d\tilde{t}.$$

Es ist daher gerechtfertigt, die Parametrisierung in der Notation wegzulassen.

Spezialfall: Die *Kurvenlänge* von C ist

$$\text{vol}_1(C) := \int_C 1 \, d\text{vol}_1 = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

Spezialfall: Der Graph einer C^1 -Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die Parametrisierung

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$$

mit Ableitung $\begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}$. Die Kurvenlänge ist in diesem Fall also gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + |g'(t)|^2} \, dt.$$

Beispiel: Das Stück der Parabel $y = x^2$ im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ hat die Kurvenlänge

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + ((x^2)')^2} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \dots = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \log(2 + \sqrt{5}).$$

Beispiel (Kettenlinie): Welche Kurve beschreibt eine zwischen zwei Punkten frei aufgehängte homogene Kette in Ruhelage? *Lösung mit Aufstellen der Differentialgleichung:* Die Kurve sei der Graph einer C^1 -Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Die in dem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ wirkende innere Zugkraft der Kette hat die Richtung der Tangente, ist also gleich $s(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$ für eine positive Funktion $x \mapsto s(x)$. Sei $\ell(x)$ die Länge des Teilstücks der Kette über dem Teilintervall $[a, x]$. Dann wirkt auf dieses Teilstück die Schwerkraft $\begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \ell(x) \end{pmatrix}$ für eine positive Konstante μ . Am rechten Ende des Teilstücks wirkt die nach rechts gerichtete Zugkraft $s(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$, und am linken Ende die nach links gerichtete Zugkraft $-s(a) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(a) \end{pmatrix}$. Für das Gleichgewicht muss die Summe dieser drei Kräfte Null sein, das heisst, es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} s(x) - s(a) &= 0, \\ -\mu \ell(x) + s(x) y'(x) - s(a) y'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Zeile besagt, dass $s(x) = s$ konstant ist, und die zweite ist dann äquivalent zu

$$y'(x) = c \ell(x) + y'(a)$$

mit der Konstanten $c := \frac{\mu}{s} > 0$. Durch Ableiten nach x folgt mit der obigen Formel für die Kurvenlänge und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y''(x) = c \ell'(x) = c \sqrt{1 + |y'(x)|^2}.$$

Somit erfüllt $z(x) := y'(x)$ die separierbare Differentialgleichung $z' = c \sqrt{1 + z^2}$. Wie in Abschnitt 8.4 finden wir für diese die allgemeine Lösung $z(x) = \sinh(cx + c')$ mit einer weiteren Konstanten c' . Durch Integrieren schliessen wir daraus

$$y(x) = \frac{\cosh(cx + c')}{c} + c''$$

mit einer dritten Konstanten c'' .

Variante: Eine Kurve C im \mathbb{R}^n muss nicht zusammenhängend sein, sondern kann auch aus mehreren jeweils für sich parametrisierten Stücken C_1, \dots, C_r bestehen. Das Integral über C ist dann definiert durch $\int_C = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_r}$.

10.8 Flächenintegral

Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Funktion, welche ausserhalb einer Teilmenge der Dimension ≤ 1 injektiv ist. Dann nennen wir das Bild $F := \text{image}(\varphi)$ zusammen mit φ eine *parametrisierte Fläche in \mathbb{R}^3* . Oft nennt man die *Parametrisierung* φ nicht explizit, obwohl sie im Hintergrund vorhanden sein muss.

Umparametrisierung: Für jede weitere Teilmenge $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^2$ und jede C^1 -Funktion $\psi: \tilde{B} \rightarrow B$, welche ausserhalb von Teilmengen der Dimension ≤ 1 bijektiv ist, ist die Funktion $\varphi \circ \psi: \tilde{B} \rightarrow F$ eine weitere Parametrisierung derselben Fläche.

Bemerkung: Wegen

$$\varphi\left(\begin{smallmatrix} u+\Delta u \\ v+\Delta v \end{smallmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) + \varphi_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \cdot \Delta u + \varphi_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \cdot \Delta v + o\left(\left(\begin{smallmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{smallmatrix}\right)\right)$$

bildet φ ein kleines Rechteck $[u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$ näherungsweise auf das von den Vektoren $\varphi_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \cdot \Delta u$ und $\varphi_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \cdot \Delta v$ aufgespannte Parallelogramm ab. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist gegeben durch die mit dem Vektorprodukt gebildete Formel $|\varphi_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \cdot \Delta u \times \varphi_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \cdot \Delta v|$, während das Rechteck den Flächeninhalt $\Delta u \cdot \Delta v$ hat. Wenn

wir über die Fläche integrieren wollen, müssen wir den Integranden daher mit dem lokalen Streckungsfaktor $|\varphi_u(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \times \varphi_v(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})|$ gewichten. Wir definieren also:

Definition: Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $\varphi: B \rightarrow F$, und sei f eine Funktion auf F . Dann heißt

$$\int_F f \, d\text{vol}_2 := \int_B f(\varphi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})) |\varphi_u(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \times \varphi_v(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})| \, d\text{vol}_2(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})$$

das *Flächenintegral von f über F* , sofern es existiert.

Satz: Das Flächenintegral ist invariant unter Umparametrisierung.

Spezialfall: Der *Flächeninhalt* von F ist

$$\text{vol}_2(F) := \int_F 1 \, d\text{vol}_2 = \int_B |\varphi_u(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \times \varphi_v(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})| \, d\text{vol}_2(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}).$$

Spezialfall: Der Graph einer C^1 -Funktion $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt die Parametrisierung

$$\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \end{pmatrix}$$

mit den partiellen Ableitungen $\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u \end{pmatrix}$ und $\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v \end{pmatrix}$. Der lokale Streckungsfaktor ist daher

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}.$$

Der Flächeninhalt ist in diesem Fall also gleich

$$\int_B \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2} \, d\text{vol}_2(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}).$$

Beispiel: Der Graph F der Funktion

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq R^2 \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto u^2 - v^2$$

ist ein Ausschnitt aus einem hyperbolischen Paraboloiden in der Form eines Kartoffelchips. Sein Flächeninhalt ist

$$\int_B \sqrt{1 + (2u)^2 + (-2v)^2} \, d\text{vol}_2(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{6} \cdot ((1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Spezialfall: Die Oberfläche F des zu einer C^1 -Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ assoziierten Rotationskörpers besitzt die Parametrisierung

$$\psi: [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow F, \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(z) \cos \varphi \\ g(z) \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Für diese gilt

$$|\psi_z \times \psi_\varphi| = \left| \begin{pmatrix} g'(z) \cos \varphi \\ g'(z) \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -g(z) \sin \varphi \\ g(z) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -g(z) \cos \varphi \\ -g(z) \sin \varphi \\ g'(z)g(z) \end{pmatrix} \right| = g(z) \cdot \sqrt{1 + g'(z)^2}.$$

Der Flächeninhalt von F ist somit

$$\text{vol}_2(F) = \int_a^b \int_0^{2\pi} g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} d\varphi dz = \int_a^b 2\pi g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz.$$

Beispiel: Die zu der Funktion $g: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $z \mapsto \sqrt{R^2 - z^2}$ assoziierte Rotationsfläche F ist die Oberfläche einer Kugel vom Radius R . In diesem Fall gilt $g'(z) = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}}$ und $g(z) \cdot \sqrt{1 + g'(z)^2} = R$, und der Flächeninhalt ist somit

$$\text{vol}_2(F) = \int_{-R}^R 2\pi R dz = 4\pi R^2.$$

Beispiel: Der zu der Funktion $g: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ assoziierte Rotationskörper

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{z} \right\}$$

hat die Form einer Trompete mit einem sich nach unendlich erstreckenden immer dünner werdendem Schaft („Gabriels Horn“). Sein Volumen und seine Oberfläche sind gegeben durch die uneigentlichen Integrale

$$\text{vol}_3(H) = \int_1^\infty \pi g(z)^2 dz = \int_1^\infty \frac{\pi}{z^2} dz = -\frac{\pi}{z} \Big|_1^\infty = \pi$$

und

$$\text{vol}_2(\partial H) = \int_1^\infty 2\pi g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz = \int_1^\infty \frac{2\pi}{z} \sqrt{1 + \frac{1}{z^4}} dz \geq \int_1^\infty \frac{2\pi}{z} dz = \infty.$$

Der Körper hat also endliches Volumen, aber unendliche Oberfläche. Wieviel Farbe braucht man also, um die Trompete von innen, bzw. von aussen anzustreichen?

11 Vektoranalysis

11.1 Vektorfelder

Definition: Sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heisst ein *Skalarfeld auf U* . Eine Funktion $K: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst ein *Vektorfeld auf U* .

Bedeutung: Ein Skalarfeld kann die räumliche Verteilung einer skalaren physikalischen Grösse, wie z.B. Druck oder Temperatur, angeben. Ein Vektorfeld kann als *Kraftfeld* eine auf jeden Punkt einwirkende (z.B. elektromagnetische oder Gravitations-) Kraft angeben. Als *Strömungsfeld* kann es den Geschwindigkeitsvektor jedes Teilchens eines strömenden Mediums angeben. Als *Gradientenvektorfeld* kann es den Gradienten eines differenzierbaren Skalarfelds angeben. Und anderes mehr.

Definition: Eine C^1 -parametrisierte Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ für die gilt $\gamma' = K \circ \gamma$, oder ihr Bild $C \subset U$, heisst *Feldlinie von K* .

Bemerkung: Die definierende Gleichung $\gamma'(t) = K(\gamma(t))$ für Feldlinien ist ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Für die Existenz und Eindeutigkeit sowie das Auffinden seiner Lösungen gelten dieselben Prinzipien wie in Kapitel 8. Ist also K lokal Lipschitz-stetig, so geht durch jeden Punkt von U genau eine maximal ausgedehnte Feldlinie.

Bedeutung: Beschreibt γ die Bewegung eines Teilchens als Funktion der Zeit, so ist der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ zur Zeit t gleich dem jeweiligen Wert des Vektorfelds $K(\gamma(t))$. In einem Strömungsfeld sind die Feldlinien also einfach die Trajektorien einzelner Teilchen. Die Feldlinien eines Gradientenvektorfelds ∇f sind die Kurven des grössten Anstiegs von f .

Beispiel: Ein konstantes Vektorfeld $K(x) = K_0$ tritt auf als praktikable Näherung für das Schwerfeld auf der Erdoberfläche, für das elektrostatische Feld in einem Plattenkondensator, als Strömungsfeld einer gleichmässigen Strömung, usw. Seine Feldlinien sind die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufenen Geraden der Form $t \mapsto x_0 + K_0 t$.

Beispiel: Eine Punktmasse oder -ladung im Nullpunkt des \mathbb{R}^3 erzeugt ein rotationssymmetrisches Vektorfeld der Form $K(x) = -c \cdot \frac{x}{|x|^3}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ für eine reelle Konstante c . Dabei ist $c > 0$ im Fall der Gravitation und der Anziehung entgegengesetzter elektrischer Ladungen, und $c < 0$ im Fall der Abstossung elektrischer Ladungen desselben Vorzeichens. Die Feldlinien sind die auf den Ursprung hin oder von ihm weg gerichteten radialen Strahlen mit Parametrisierung $t \mapsto \sqrt[3]{3c(t_0 - t)} \cdot e_0$ für alle Einheitsvektoren $e_0 \in \mathbb{R}^3$.

Beispiel: Eine homogene Kugel vom Radius R im \mathbb{R}^3 erzeugt ein Gravitationsfeld der folgenden Form auf \mathbb{R}^3 für eine Konstante $c > 0$ (vergleiche Abschnitt 10.5):

$$K(x) = \begin{cases} -c \cdot \frac{x}{|x|^3} & \text{für } |x| \geq R, \\ -c \cdot \frac{x}{R^3} & \text{für } |x| \leq R. \end{cases}$$

Dieses Vektorfeld ist stetig, aber nicht differenzierbar. Seine Feldlinien sind dieselben wie im vorigen Beispiel, nur mit anderer Parametrisierung.

Beispiel: Für festes $\omega \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ betrachte das Vektorfeld $K(x) := \omega \times x$ auf \mathbb{R}^3 , wobei \times das Vektorprodukt bezeichnet. Dies ist das Geschwindigkeitsfeld einer gleichmässigen Rotation um die Achse $\mathbb{R}\omega$ mit der Winkelgeschwindigkeit $|\omega|$. Seine Feldlinien sind die Kreise mit Mittelpunkt in $\mathbb{R}\omega$ in allen zu $\mathbb{R}\omega$ senkrecht liegenden Ebenen.

Beispiel: Für festes $\omega \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ betrachte das Vektorfeld $K(x) := \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\omega$. Während im vorigen Beispiel der Betrag von $K(x)$ proportional zum Abstand von x zur Geraden $\mathbb{R}\omega$ war, ist er jetzt umgekehrt proportional dazu. Die Feldlinien sind daher die gleichen, aber mit anderer Parametrisierung. Ein solches Feld tritt als von einem konstanten Strom in einem geraden elektrischen Leiter erzeugtes Magnetfeld auf.

Beispiel: Finde die Feldlinien des folgenden Vektorfelds auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$:

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

Lösung: Schreibe $\gamma = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ für Funktionen $r = r(t) > 0$ und $\varphi = \varphi(t)$. Dann übersetzt sich das System von Differentialgleichungen zu

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi \\ \cos \varphi + \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation von links mit der invertierbaren Matrix $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ wird dieses äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung $\dot{r} = 1$ hat die allgemeine Lösung $r(t) = t - t_0$. Die Nebenbedingung $r > 0$ bedeutet dabei $t > t_0$. Damit wird die zweite Gleichung $r \dot{\varphi} = 1$ zu $\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{t-t_0}$ mit der allgemeinen Lösung $\varphi(t) = \varphi_0 + \log |t - t_0|$. Für alle $t_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ ist somit

$$]t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} (t - t_0) \cdot \cos(\varphi_0 + \log |t - t_0|) \\ (t - t_0) \cdot \sin(\varphi_0 + \log |t - t_0|) \end{pmatrix}$$

eine maximale Lösung des Differentialgleichungssystems. Da die Bildkurven ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ überdecken und das Vektorfeld K stetig differenzierbar und daher lokal Lipschitz-stetig ist, haben wir nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz alle maximalen Lösungen gefunden. Die Feldlinien sind somit alle vom Ursprung ausgehenden *logarithmischen Spiralen*, die jede Gerade durch den Ursprung im Winkel von 45° schneiden und sich entgegen dem Uhrzeigersinn hin öffnen.

11.2 Potentiale

Sei K ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definition: Ein differenzierbares Skalarfeld f auf U , für welches $K = \nabla f$ oder $K = (\nabla f)^T$ ist, heisst ein *Potential* von K .

Bemerkung: Im Fall $n = 1$ ist ein Potential dasselbe wie eine Stammfunktion.

Bemerkung: Sei f ein Potential von K . Dann ist für jede lokal konstante Funktion $c = c(x)$ auf U auch die Funktion $f + c$ ein Potential von K , und umgekehrt hat jedes Potential von K diese Gestalt.

Bedeutung: Ein Potential eines Kraftfelds kann als Verteilung der zugehörigen potentiellen Energie interpretiert werden. Verschiedene Potentiale entsprechen verschiedenen Normierungen der potentiellen Energie.

Vorsicht: In Dimension $n \geq 2$ haben viele relevante Vektorfelder kein Potential.

Im folgenden behandeln wir verschiedene Kriterien für die Existenz eines Potentials. Die erste Methode liefert bei Erfolg auch gleich eine Formel für ein Potential:

Explizite Bestimmung eines Potentials: Sei $K = (K_1, \dots, K_n)$ ein Vektorfeld auf $I_1 \times \dots \times I_n$ für offene Intervalle $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$. Ein Potential von K ist dann eine differenzierbare Funktion $f: I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_i} = K_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Die erste Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x_1} = K_1$ bedeutet, dass f eine Stammfunktion von K_1 bezüglich der Variablen x_1 sein muss. Eine solche ist eindeutig bestimmt bis auf eine von x_1 unabhängige Konstante, das heisst, bis auf eine Funktion der übrigen Variablen x_2, \dots, x_n . Wähle also eine Stammfunktion $g_1(x) = \int K_1(x) dx_1$; dann muss das gesuchte Potential die Form $f = g_1 + f_1$ haben, wobei $f_1(x)$ von x_1 unabhängig ist.

Die zweite Gleichung lautet dann $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = K_2$ und bedeutet, dass f_1 eine Stammfunktion von $K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$ bezüglich der Variablen x_2 sein muss. Da ausserdem f_1 von x_1 unabhängig sein muss, erhalten wir als erste notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials, dass $K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$ von x_1 unabhängig ist. Ist das der Fall, so wähle eine von x_1 unabhängige Stammfunktion $g_2(x) = \int (K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}) dx_2$. Dann muss $f_1 = g_2 + f_2$ sein für eine von x_1 und x_2 unabhängige Funktion f_2 .

Genauso weiterfahrend erhält man im nächsten Schritt als notwendige Bedingung, dass $K_3 - \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}$ von x_1 und x_2 unabhängig ist. Ist das der Fall, so wähle eine von x_1 und x_2 unabhängige Stammfunktion $g_3(x) = \int (K_3 - \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}) dx_3$; dann muss $f_2 = g_3 + f_3$ sein für eine von x_1, x_2 , und x_3 unabhängige Funktion f_3 . Und so weiter.

Hat man alle Variablen abgearbeitet, so ist f_n eine frei wählbare Konstante und die Funktion $f = g_1 + \dots + g_n + f_n$ das gesuchte Potential.

Beispiel: Das Vektorfeld $(x^3 + xy^2, x^2y - y^5)$ auf \mathbb{R}^2 hat das Potential $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^6}{6} + c$.

Beispiel: Für welche Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld $(2xy + yz, x^2 + xz + z, axy + by + cz)$ ein Potential, und welches? *Antwort:* Genau für $a = b = 1$ und beliebige c , und es lautet $x^2y + xyz + yz + \frac{cz^2}{2} + d$ für eine beliebige Konstante $d \in \mathbb{R}$.

Satz: Ein C^1 -Vektorfeld $K = (K_1, \dots, K_n)$ auf einem offenen Quader $I_1 \times \dots \times I_n$ besitzt ein Potential genau dann, wenn $\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$ ist für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Bemerkung: Mit der Identifikation $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ kann man damit zeigen, dass eine komplexe Funktion auf einem offenen Rechteck genau dann eine komplexe Stammfunktion besitzt, wenn sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

Beispiel: Das konstante Vektorfeld K_0 auf \mathbb{R}^n hat das Potential $K_0 \cdot x = \langle K_0, x \rangle$.

Beispiel: Das Vektorfeld $-c \cdot \frac{x}{|x|^3}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ hat das Potential $\frac{c}{|x|}$.

Beispiel: Für $\omega \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ besitzt das Vektorfeld $K(x) := \omega \times x$ kein Potential, auch nicht lokal in einer Umgebung eines Punkts. Denn eine Drehstreckung reduziert uns auf den Fall $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und dann gilt $K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist $\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) = \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$ und die Bedingung des Satzes verletzt.

Beispiel: Nach der gleichen Reduktion wie im vorigen Beispiel hat das Vektorfeld $K(x) := \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\omega$ die Gestalt $K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine explizite Rechnung ergibt jetzt $\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$. Ausserdem gilt trivialerweise $\frac{\partial K_1}{\partial x_3} = 0 = \frac{\partial K_3}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial K_2}{\partial x_3} = 0 = \frac{\partial K_3}{\partial x_2}$. Also sind die Bedingungen des Satzes erfüllt, und auf jedem in $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\omega$ enthaltenen Quader besitzt K ein Potential f . Konkret findet man $f(x) = \arg(x_1 + ix_2) + c$ für eine Konstante c . Allerdings wissen wir bereits, dass \arg nur lokal, aber nicht auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ als stetige Funktion definierbar ist. Deshalb besitzt das Vektorfeld in diesem Fall zwar überall lokal, aber nicht global ein Potential.

11.3 Vektorielltes Kurvenintegral

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1 -parametrisierte Kurve, wie in Abschnitt 10.7.

Definition: Die entlang C durch den Vektor γ' bestimmte Richtung heisst *Orientierung von C* , und die mit dieser Orientierung versehene Kurve heisst ein *Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$* , oder ein *Weg mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$* . Ein Weg mit demselben Anfangs- und Endpunkt heisst ein *geschlossener Weg*.

Definition: Eine Umparametrisierung durch eine bijektive C^1 -Funktion $\psi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ heisst *orientierungserhaltend*, wenn ψ monoton wachsend ist, andernfalls *orientierungsvertauschend*.

Definition: Seien f eine Funktion auf C , und g eine auf einer Umgebung von C definierte differenzierbare Funktion. Dann setzen wir

$$\int_{\gamma} f dg := \int_a^b (f \circ \gamma)(t) (g \circ \gamma)'(t) dt,$$

Satz: Dieses Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung, das heisst, für jede orientierungserhaltende Umparametrisierung ψ wie oben gilt

$$\int_a^b (f \circ \gamma)(t) (g \circ \gamma)'(t) dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} (f \circ \gamma \circ \psi)(\tilde{t}) (g \circ \gamma \circ \psi)'(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Dagegen bewirkt jede orientierungsvertauschende Umparametrisierung einen Vorzeichenwechsel.

Definition: Das *vektorielle Kurven-* oder *Wegintegral* eines Vektorfelds $K : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ über γ ist, falls es existiert, definiert durch

$$\int_{\gamma} K(x) \cdot dx := \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

wobei \cdot das Matrixprodukt oder Skalarprodukt bezeichnet. In einzelnen Koordinaten geschrieben ist es gleich

$$\int_{\gamma} K(x) \cdot dx = \int_{\gamma} K_1 dx_1 + \dots + \int_{\gamma} K_n dx_n.$$

Interpretation: Ist K ein Kraftfeld, so misst das Kurvenintegral die Arbeit, die nötig ist, um ein Teilchen längs γ durch das Feld zu bewegen.

Satz: Das vektorielle Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung. Dagegen bewirkt jede orientierungsvertauschende Umparametrisierung einen Vorzeichenwechsel.

Bemerkung: Der Vergleich mit dem vektoriellen Kurvenintegral legt es nahe, das skalare Kurvenintegral mit $\int_C f(x) |dx|$ zu bezeichnen.

Variante: Orientierte Wege können wir zusammensetzen wie folgt:

Definition: (a) Eine formale Summe $\gamma_1 + \dots + \gamma_r$ von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ in U heisst eine *Kette von Wegen in U* . Das Integral darüber ist definiert durch $\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_r} := \int_{\gamma_1} + \dots + \int_{\gamma_r}$.

(b) Für jeden Weg γ bezeichnet $-\gamma$ den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg.

Eigenschaften: (a) Entstehen $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ durch Aufteilung von γ , so gilt $\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_r} = \int_{\gamma}$.

(b) Es gilt $\int_{-\gamma} = -\int_{\gamma}$.

Der folgende Integralsatz für Kurvenintegrale ist eine erste vektorielle Variante des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung. Weitere Integralsätze für höherdimensionale Integrale werden folgen.

Integralsatz: Für jedes C^1 -Skalarfeld f auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und jeden Weg γ von P nach Q in U gilt

$$\int_{\gamma} \nabla f(x) \cdot dx = f(Q) - f(P).$$

Satz: Für jedes stetige Vektorfeld K auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- (a) Das Vektorfeld K besitzt ein Potential.
- (b) Das Integral von K über jeden Weg in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.
- (c) Das Integral von K über jeden geschlossenen Weg in U ist Null.

Definition: Aufgrund der Eigenschaft (c), also weil die ‘Energie’ über jeden geschlossenen Weg erhalten bleibt, heisst ein Vektorfeld mit diesen Eigenschaften auch *konservativ*.

Beispiel: Das Vektorfeld $K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die geschlossenen Feldlinien $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ z \end{pmatrix}$ für beliebige Konstanten $r > 0$ und z . Wir berechnen $\int_{\gamma} K(x) \cdot dx = 2\pi r^2$; also besitzt K kein Potential.

Beispiel: Das Vektorfeld $K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $U := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die gleichen Feldlinien γ wie im vorigen Beispiel. Diesmal erhalten wir $\int_{\gamma} K(x) \cdot dx = 2\pi$, und wieder besitzt K kein Potential. Am Ende von Abschnitt 11.2 haben wir aber gesehen, dass K überall lokal das Potential $\arg(x_1 + ix_2) + c$ besitzt. Durch Kombination mit dem Satz aus Abschnitt 11.3 folgt also, dass das Kurvenintegral von K über jeden in einem Quader $I_1 \times I_2 \times I_3 \subset U$ enthaltenen geschlossenen Weg gleich Null ist. Wie ist dieser Unterschied zu erklären?

Der Grund liegt zum einen darin, dass die Feldlinie γ sich um die singuläre Gerade $g: x_1 = x_2 = 0$ von K herum windet und auch durch Deformation innerhalb von U nicht davon befreit werden kann, wohingegen jeder geschlossene Weg in einem Quader $I_1 \times I_2 \times I_3 \subset U$ vollständig auf einer Seite von g liegt. Zum anderen ist das Kurvenintegral $\int_{\gamma} K(x) \cdot dx = 2\pi$ genau der Unterschied zwischen dem Funktionswert am Anfangs- und Endpunkt, den wir erhalten, wenn wir $\arg(x_1 + ix_2) + c$ entlang γ stetig fortsetzen. Allgemeiner ist das Integral von K über jeden geschlossenen Weg in U , der sich in Richtung von γ gesehen insgesamt genau $k \in \mathbb{Z}$ mal um g herum windet, gleich $2\pi k$. Die Zahl k heisst die *Windungszahl* von γ bezüglich der Geraden g . Vergleiche auch Abschnitt 11.8.

11.4 Integralsatz von Green im \mathbb{R}^2

Sei $K = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (K_1, K_2)$ ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$.

Definition: Das Skalarfeld $\text{rot } K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}$ auf U heisst die *Rotation von K* . Die englische Bezeichnung ist *curl K* .

Definition: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand eine ausserhalb endlich vieler Punkte disjunkte Vereinigung von stückweise C^1 -Kurven C_1, \dots, C_r ist. Dann bezeichnet ∂X eine Kette von Wegen $\gamma_1 + \dots + \gamma_r$ mit $\text{image}(\gamma_i) = C_i$ und der Orientierung, bei der die Punkte von X nahe C_i in Blickrichtung gesehen stets *auf der linken Seite* liegen.

Bemerkung: Der Rand ∂X kann stets als formale Summe geschlossener Wege geschrieben werden. Der äussere Rand von X wird in mathematisch positiver Richtung, das heisst, entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen, der Rand eines Lochs in X dagegen anders herum.

Integralsatz von Green: Für alle K und $X \subset U$ wie oben gilt

$$\int_X \text{rot } K \, d\text{vol}_2 = \int_{\partial X} K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Anwendung: Wie bei allen Integralsätzen ist in der Regel eine Seite leichter zu berechnen als die andere. Den Integralsatz kann man dann dazu benützen, die andere Seite effizient zu berechnen.

Bemerkung: Wie bei allen Integralsätzen sind beide Seiten der Gleichung additiv unter Zerlegung von X . Sei nämlich $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine Zerlegung mit $X_i \cap X_j$ der Dimension < 2 für alle $i \neq j$. Die Additivität der linken Seite folgt dann direkt aus der Definition des skalaren Integrals. Auf der rechten Seite besteht die Randkette $\partial X_1 + \dots + \partial X_r$ aus dem Rand ∂X und den verschiedenen Schnittkurven der Zerlegung. Jede der letzteren taucht aber genau zweimal mit entgegengesetzten Orientierungen im Rand zweier verschiedener Teile X_i, X_j auf. Die Integrale darüber heben sich also weg, und somit ist auch die linke Seite additiv.

Bemerkung: Den Satz von Green beweist man, indem man ihn durch Zerschneiden und Benutzen der Additivität, und gegebenenfalls mit einem Grenzübergang, auf den Fall einer einfacheren Menge X zurückführt. Ist zum Beispiel X sowohl x -einfach als auch y -einfach, so berechnet man die Integrale $\int_X \frac{\partial K_1}{\partial y} \, d\text{vol}_2$ und $\int_X \frac{\partial K_2}{\partial x} \, d\text{vol}_2$ separat mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung und nimmt am Schluss die Differenz.

Bedeutung: Die rechte Seite misst die *Zirkulation* von K entlang ∂X und ist ein Mass dafür, wie sich K mit der Kurve ∂X mitdreht. Nach dem Satz von Green kann man folglich $\text{rot } K$ als *lokale Zirkulationsrate* von K interpretieren, deren Integral über X die Gesamtzirkulation ergibt.

Anwendung: Ein ebenes Vektorfeld K mit $\text{rot } K = 0$ heisst *rotationsfrei*. Nach dem Satz in Abschnitt 11.2 ist dies äquivalent dazu, dass K lokal ein Potential besitzt. Andererseits impliziert es nach dem Satz von Green, dass sein Kurvenintegral über jede Kette von Wegen der Form ∂X gleich Null ist. Das Verschwinden von $\int_\gamma K \cdot d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für einen geschlossenen Weg γ ist aber nur dann garantiert, wenn K sowohl rotationsfrei als auch auf ganz X mit $\partial X = \gamma$ definiert ist.

Anwendung: Kann man zu einer gegebenen skalarwertigen Funktion f ein Vektorfeld K mit $\operatorname{rot} K = f$ finden, so übersetzt der Satz von Green das zweidimensionale skalare Integral $\int_X f \, d\operatorname{vol}_2$ in ein eindimensionales Integral entlang des Randes ∂X . Wie beim Satz von Fubini ist damit die Integralberechnung um eine Dimension reduziert.

Flächeninhalt: Für jedes der Vektorfelder $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0, x)$ oder $(-y, 0)$ oder $(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ ist $\operatorname{rot} K$ identisch gleich 1 und somit

$$\operatorname{vol}_2(X) = \int_X \operatorname{rot} K \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Eine *Zykloide* ist die Kurve, welche beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden im \mathbb{R}^2 von einem auf dem Kreis festgemachten Punkt beschrieben wird. Bestimme den Flächeninhalt zwischen einem Bogen der Zykloide und der zugehörigen Geraden, wenn der Kreis den Radius r hat.

Lösung: Wir nehmen an, der Kreis rolle auf der Oberseite der x -Achse entlang. Ein Bogen der Zykloide lässt sich zwar nur schwer als Graph einer Funktion beschreiben, aber leicht parametrisieren durch $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}$. Betrachte ausserdem den Weg $\delta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} rt \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann hat die fragliche Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$ den orientierten Rand $\partial X = (-\gamma) + \delta$. Mit $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-y, 0)$ erhalten wir $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -y \, dx$ und somit

$$\operatorname{vol}_2(X) = \int_{-\gamma} (-y) \, dx + \int_{\delta} (-y) \, dx = \int_{\gamma} y \, dx - \int_{\delta} y \, dx.$$

Da der Integrand y entlang der x -Achse verschwindet, ist $\int_{\delta} y \, dx = 0$. Das verbleibende Integral berechnet sich mittels der gegebenen Parametrisierung zu

$$\operatorname{vol}_2(X) = \int_{\gamma} y \, dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) \cdot \frac{d}{dt}(r(t - \sin t)) \, dt = \dots = 3\pi r^2.$$

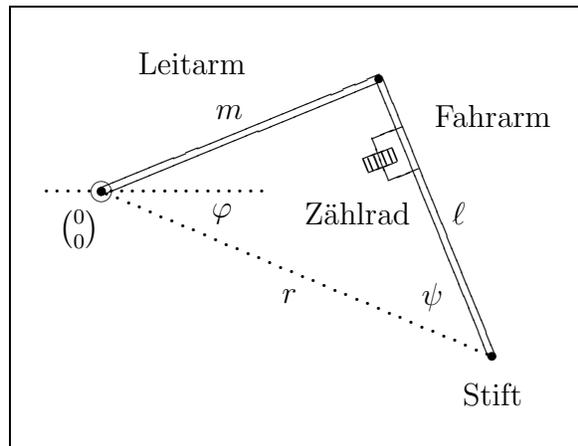
Planimeter: Vor der Entwicklung digitaler Computer hat man für verschiedene mathematische Berechnungen geeignete feinmechanische Geräte entwickelt, wie zum Beispiel den Rechenschieber. Ein *Planimeter* ist ein Gerät, bei dem man einen Stift einer geschlossenen ebenen Kurve entlang fährt und am Ende einen Näherungswert für den Flächeninhalt des von der Kurve umschlossenen Bereichs ablesen kann. Ein auf kartesischen Koordinaten basierendes Gerät ist aber in der Regel recht kompliziert. Verblüffend einfach zu realisieren ist dagegen ein Planimeter, das auf Polarkoordinaten basiert.

Das Polarplanimeter von Amsler: Jacob Amsler (1823–1912) erfand dieses Gerät im Jahr 1856. Er gründete in Schaffhausen eine Firma, die bis 1970 existierte und unzählige mathematische Präzisionsinstrumente herstellte.

Das Gerät besteht aus einem Leitarm, dessen eines Ende beweglich im Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ausserhalb von X gelagert ist, und dessen anderes Ende durch ein Gelenk mit dem Fahrarm verbunden ist. Am äusseren Ende des Fahrarms ist ein Stift befestigt, welcher den Rand

∂X entlang geführt wird. Nahe dem Zwischengelenk ist ein Zählrad mit Achse parallel zum Fahrarm befestigt, das während der Bewegung teilweise abrollt und teilweise entlangschleift und dabei nur denjenigen Teil der Bewegung mitzählt, welcher in Rollrichtung liegt. Dies entspricht dem Skalarprodukt im vektoriiellen Kurvenintegral.

In der folgenden Aufsicht bezeichnen m und ℓ die konstanten Längen des Leit- bzw. Fahrarms und r die variable Länge der dritten Seite des durch diese gebildeten Dreiecks, sowie φ und ψ variable Winkel.



Die Position des Stifts in kartesischen Koordinaten ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Mit dem Satz von Green für $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ erhalten wir also

$$\text{vol}_2(X) = \int_{\partial X} \frac{x dy - y dx}{2} = \dots = \int_{\partial X} \frac{r^2}{2} d\varphi.$$

Nach dem Kosinussatz gilt $m^2 = r^2 + \ell^2 - 2r\ell \cos \psi$. Da ausserdem m und ℓ konstant sind und nach dem Satz von Green somit $\int_{\partial X} \frac{m^2 - \ell^2}{2} d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ ist, folgt

$$\text{vol}_2(X) = \int_{\partial X} \frac{m^2 - \ell^2 + 2r\ell \cos \psi}{2} d\varphi = \ell \cdot \int_{\partial X} r \cos \psi d\varphi.$$

Berechnen wir nun, was das Zählrad misst. In komplexen Zahlen hat der Stift die Position $x + iy = re^{i\varphi}$. Der Fahrarm hat die Richtung $e^{i(\varphi+\psi)}$, und der Kontaktpunkt des Zählrads hat folglich die Position $\rho := re^{i\varphi} - e^{i(\varphi+\psi)}\omega$, wobei die Konstante $\omega \in \mathbb{C}$ die relative Position des Zählrads in auf den Fahrarm bezogenen Koordinaten angibt. Die Achse des Zählrads hat ebenfalls die Richtung $e^{i(\varphi+\psi)}$, seine dazu orthogonale Rollrichtung ist also gleich $ie^{i(\varphi+\psi)}$. Der Anteil der Bewegung $d\rho$ des Zählrads in Rollrichtung ist somit gleich

$$\text{Re}\left(\frac{d\rho}{ie^{i(\varphi+\psi)}}\right).$$

Seien u der Umfang und k die gemessene Gesamtzahl von Umdrehungen des Zählrads. Dann haben wir also

$$uk = \int_{\partial X} \text{Re}\left(\frac{d\rho}{ie^{i(\varphi+\psi)}}\right).$$

Nach einigen Umformungen ist dies gleich

$$\int_{\partial X} r \cos \psi \, d\varphi - \int_{\partial X} (\sin \psi \, dr + \operatorname{Im}(i\omega) \, d\psi) - \int_{\partial X} \operatorname{Im}(i\omega) \, d\varphi.$$

Betrachte irgendeine Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial X$. Da ω konstant und $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, ist das letzte dieser Integrale nach der Definition im Abschnitt 11.3 gleich

$$\int_{\partial X} \operatorname{Im}(i\omega) \, d\varphi = \int_a^b \operatorname{Im}(i\omega) (\varphi \circ \gamma)'(t) \, dt = \operatorname{Im}(i\omega) (\varphi \circ \gamma)(t) \Big|_a^b = 0.$$

Andererseits hängt r nur von ψ ab, und somit ist das mittlere Integral gleich

$$\int_{\partial X} (\sin \psi \, dr + \operatorname{Im}(i\omega) \, d\psi) = \int_{\partial X} (\sin \psi \frac{dr}{d\psi} + \operatorname{Im}(i\omega)) \, d\psi = \int_{\partial X} f(\psi) \, d\psi$$

für die Funktion $f(\psi) := \sin \psi \frac{dr}{d\psi} + \operatorname{Im}(i\omega)$. Mit irgendeiner Stammfunktion F von f folgt

$$\int_{\partial X} f(\psi) \, d\psi = \int_a^b (F' \circ \psi \circ \gamma)(t) (\psi \circ \gamma)'(t) \, dt = (F \circ \psi \circ \gamma)(t) \Big|_a^b = 0.$$

Insgesamt erhalten wir deshalb

$$\operatorname{vol}_2(X) = \ell \cdot \int_{\partial X} r \cos \psi \, d\varphi = \ell u k.$$

Der Flächeninhalt ist also proportional zur Gesamtzahl von Umdrehungen des Zählrads. Der Proportionalitätsfaktor hängt nur von der Länge ℓ des Fahrarms und dem Umfang u des Zählrads ab, nicht aber von der Länge des Leitarms oder der Position des Zählrads!

De facto kann man bei richtiger Anwendung des Geräts und entsprechender Erfahrung eine Genauigkeit von bis zu 1% erreichen.

11.5 Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^2

Seien weiter $K = K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (K_1, K_2)$ ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und X eine kompakte Teilmenge von U mit orientiertem stückweise C^1 -Rand ∂X .

Definition: Das Skalarfeld $\operatorname{div} K := \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y}$ auf U heisst die *Divergenz von K* .

Der Satz von Green übersetzt sich damit schnell in den folgenden *Divergenzsatz*:

Integralsatz von Gauss: Für alle K und $X \subset U$ wie oben gilt

$$\int_X \operatorname{div} K \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} K_1 \, dy - K_2 \, dx.$$

Definition: Ein Vektor, der orthogonal zur Tangente in einem regulären Punkt einer Kurve ist, heisst *Normalenvektor*. In jedem regulären Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \partial X$ bezeichne $n = n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ den

eindeutigen von X aus *nach aussen* gerichteten Einheitsnormalenvektor auf ∂X . Damit lässt sich der Satz von Gauss wie folgt umformulieren:

Integralsatz von Gauss: Für alle K und $X \subset U$ wie oben gilt

$$\int_X \operatorname{div} K \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_1.$$

Bedeutung: Die Divergenz eines Vektorfelds ist die örtliche Rate der Dichtezunahme (bei negativem Vorzeichen also der -abnahme) eines strömenden Mediums, oder die örtliche Produktionsrate (bzw. bei negativem Vorzeichen die Absorptionsrate) eines stationären Mediums. Die beiden Phänomene können auch kombiniert auftreten, wenn zum Beispiel ein strömendes Gas sich gleichzeitig komprimiert oder ausdehnt, oder wenn durch eine chemische Reaktion weiteres Gas produziert wird. In jedem Fall ist die linke Seite im Satz von Gauss die Änderungsrate der Gesamtmenge des in X vorhandenen Mediums.

Auf der anderen Seite zerlegt sich das Strömungsfeld K in einem regulären Randpunkt in einen zum Rand parallelen Anteil und einen dazu orthogonalen Anteil $K \cdot n$. Ersterer beschreibt eine Strömung entlang des Rands, während letzterer die örtliche Flussrate durch den Rand hindurch angibt. Die rechte Seite im Satz von Gauss ist also die gesamte von X aus nach aussen gerichtete Flussrate von K durch ∂X .

Der Satz von Gauss lässt sich somit als Erhaltungssatz interpretieren in dem Sinn, dass die Gesamtproduktionsrate in X gleich der Gesamtflussrate durch ∂X hindurch nach aussen sein muss.

Beispiel: Sei X die Kreisscheibe vom Radius r um den Nullpunkt in \mathbb{R}^2 . Das lineare Strömungsfeld $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ hat die konstante Divergenz $\operatorname{div} K = a + d$. Die Gesamtproduktionsrate von K in X ist somit $\int_X \operatorname{div} K \, d\operatorname{vol}_2 = (a + d) \cdot \operatorname{vol}_2(X) = (a + d)\pi r^2$. Nach dem Satz von Gauss ist dies gleich der Gesamtflussrate $\int_{\partial X} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_1$ von K durch ∂X hindurch nach aussen. Diese kann man mit etwas Rechenaufwand auch direkt berechnen.

11.6 Vektorielltes Flächenintegral

Seien B eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 und $\varphi: B \rightarrow F$ eine C^1 -Parametrisierung einer Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, wie in Abschnitt 10.8.

Definition: Das *vektorielle Flächenintegral* eines Vektorfelds $K: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ über F ist, falls es existiert, definiert durch

$$\int_F K \cdot d\omega := \int_B (K \circ \varphi) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, d\operatorname{vol}_2.$$

Definition: In jedem regulären Punkt von φ sind φ_u und φ_v linear unabhängig, und folglich ist $n := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$ ein auf der Fläche F senkrecht stehender Einheitsnormalenvektor.

Damit lässt sich das vektorielle Flächenintegral als skalares Flächenintegral schreiben:

$$\int_F K \cdot d\omega = \int_B (K \circ \varphi) \cdot n \cdot |\varphi_u \times \varphi_v| d\text{vol}_2 = \int_F K \cdot n d\text{vol}_2.$$

Definition: Die Angabe aller zu einer Parametrisierung assoziierter Einheitsnormalenvektoren heisst eine *Orientierung von F* . Zu jeder Orientierung mit den Einheitsnormalenvektoren n gibt es die *entgegengesetzte Orientierung* mit den Einheitsnormalenvektoren $-n$.

Definition: Eine Umparametrisierung $\psi: \tilde{B} \rightarrow B$ wie in Abschnitt 10.8 heisst *orientierungserhaltend*, wenn überall $\det \nabla \psi \geq 0$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass die zu $\varphi \circ \psi$ und φ assoziierten Einheitsnormalenvektoren gleich sind. Eine Umparametrisierung ψ mit $\det \nabla \psi \leq 0$ überall heisst *orientierungvertauschend*.

Satz: Das vektorielle Flächenintegral ist invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung. Dagegen bewirkt jede orientierungvertauschende Umparametrisierung einen Vorzeichenwechsel.

Bedeutung: Das Skalarprodukt $K \cdot n$ misst den Anteil des Vektorfelds in die Richtung n , das heisst, durch die Fläche hindurch. Das Integral von K misst daher den Gesamtfluss von K durch F in Richtung n .

11.7 Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^3

Sei X eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^3 , deren Rand ∂X eine C^1 -Parametrisierung als Fläche besitzt.

Definition: Wir versehen ∂X mit derjenigen Orientierung, bei der die Einheitsnormalenvektoren n von X aus gesehen *nach aussen* zeigen.

Sei weiter $K = (K_1, K_2, K_3)$ ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$

Definition: Das Skalarfeld $\text{div } K := \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + \frac{\partial K_2}{\partial x_2} + \frac{\partial K_3}{\partial x_3}$ auf U heisst die *Divergenz von K* .

Integralsatz von Gauss: Für alle K und $X \subset U$ wie oben gilt

$$\int_X \text{div } K d\text{vol}_3 = \int_{\partial X} K \cdot n d\text{vol}_2.$$

Die Beleuchtung dieses Satzes ist dieselbe wie im \mathbb{R}^2 in Abschnitt 11.5.

Beispiel: Betrachte den auf der Spitze stehenden Kegel

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \right\}.$$

Sein Rand ∂X besteht aus der durch $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z = 1$ definierten Kreisscheibe F_1 und der durch $\sqrt{x^2 + y^2} = z \leq 1$ definierten Mantelfläche F_2 . Wir versehen sie mit den Parametrisierungen

$$\begin{aligned}\varphi_1: B_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1 \right\} \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi_2: B_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1 \right\} \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der zu φ_1 assoziierte Einheitsnormalenvektor auf F_1 ist überall gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, zeigt also nach oben und somit von X aus gesehen nach aussen, wie verlangt. Der zu φ_2 assoziierte Einheitsnormalenvektor auf F_2 im Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist gleich $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -u/\sqrt{u^2+v^2} \\ -v/\sqrt{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix}$, zeigt also schräg nach oben und nach X hinein. Dies widerspricht zwar der obigen Definition; anstatt die Parametrisierung zu ändern, können wir aber genauso gut das Flächenintegral über F_2 mit einem Minuszeichen versehen. Für das Vektorfeld $K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$ berechnen wir jedes der folgenden Integrale explizit:

$$\underbrace{\int_X \operatorname{div} K \, d\operatorname{vol}_3}_{\frac{4\pi}{3}} = \underbrace{\int_{F_1} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2}_{-\pi} - \underbrace{\int_{F_2} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2}_{-\frac{7\pi}{3}}$$

Von diesen ist das letzte am aufwendigsten zu berechnen. Mit dem Satz von Gauss kann man also seine Berechnung auf die beiden anderen, einfacheren Integrale reduzieren.

Beispiel: Betrachte das Vektorfeld $K(x) := \frac{cx}{|x|^3}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ für eine Konstante $c \neq 0$. Betrachte den Rand ∂B_R der Vollkugel $B_R := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R\}$ vom Radius $R > 0$, wie oben orientiert durch den überall nach aussen gerichteten Normalenvektor n . In jedem Punkt $x \in \partial B_R$ ist dann $n = \frac{x}{|x|}$, und das Flächenintegral berechnet sich schnell durch

$$\int_{\partial B_R} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial B_R} \frac{cx}{|x|^3} \cdot \frac{x}{|x|} \, d\operatorname{vol}_2(x) = \int_{\partial B_R} \frac{c}{|x|^2} \, d\operatorname{vol}_2(x) = \frac{c}{R^2} \cdot \operatorname{vol}_2(\partial B_R) = 4\pi c.$$

Wieso ist dieser Wert unabhängig von R ? Hängt das mit dem Satz von Gauss zusammen?

Eine kurze Rechnung zeigt $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{cx_i}{|x|^3} \right) = \frac{c}{|x|^3} - \frac{3cx_i^2}{|x|^5}$ und somit $\operatorname{div} K = 0$. Wenn der Satz von Gauss auf B_R anwendbar wäre, so müsste der Fluss also 0 sein anstatt $4\pi c$. Er ist aber nicht anwendbar, weil das Vektorfeld im Nullpunkt $0 \in B_R^\circ$ eine Singularität hat! Stattdessen ist er anwendbar auf die Kugelschale $B_{R'} \setminus B_R^\circ$ für alle $R' > R > 0$. Deren Rand besteht aus dem äusseren Teil $\partial B_{R'}$ mit der obigen Orientierung und dem inneren Teil ∂B_R mit der entgegengesetzten Orientierung. Nach dem Satz von Gauss gilt also

$$\int_{\partial B_{R'}} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2 - \int_{\partial B_R} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{B_{R'} \setminus B_R^\circ} \operatorname{div} K \, d\operatorname{vol}_3 = 0,$$

was tatsächlich die Unabhängigkeit von R erklärt.

Beispiel: Berechne den Fluss von $K(x) := \frac{cx}{|x|^3}$ nach aussen durch den Rand des Würfels $W := [-a, a]^3 \subset \mathbb{R}^3$ für gegebenes $a > 0$. *Lösung:* Wähle $0 < R < a$, so dass die Vollkugel B_R ganz im Inneren von W enthalten ist. Der Satz von Gauss besagt dann

$$\int_{\partial W} K \cdot n \, d\text{vol}_2 - \int_{\partial B_R} K \cdot n \, d\text{vol}_2 = \int_{W \setminus B_R^\circ} \text{div } K \, d\text{vol}_3 = 0.$$

Also gilt

$$\int_{\partial W} K \cdot n \, d\text{vol}_2 = \int_{\partial B_R} K \cdot n \, d\text{vol}_2 = 4\pi c.$$

11.8 Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3

Der Satz von Stokes entsteht durch Übertragung des Satzes von Green auf eine parametrisierte Fläche im \mathbb{R}^3 . Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge mit einer stückweise C^1 -Randkurve ∂B , wie in Abschnitt 11.4. Sei $\varphi: B \rightarrow F$ eine C^1 -Parametrisierung einer Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$.

Definition: Wir setzen $\partial F := \varphi(\partial B)$ mit der von ∂B geerbten Orientierung.

Bedeutung: Die Fläche F ist gewissermassen zwischen ihrer Randkurve ∂F aufgespannt, wie z.B. ein Segel oder das Dach eines Zirkuszelts. Ihre von φ induzierte Orientierung ist ein System von Einheitsnormalenvektoren n , die eine der beiden Seiten von F auszeichnet. Die induzierte Orientierung von ∂F ist dadurch charakterisiert, dass, wenn wir auf der durch n bezeichneten Seite von F in diese Richtung dem Rand ∂F entlang gehen, die Punkte von F nahe ∂F in Blickrichtung gesehen *auf der linken Seite* liegen. Diese Regel gilt gleichermassen am äusseren Rand von F wie an einem ‘Loch’ in F .

Vorsicht: Mit ∂F ist hier nicht der Rand von F als allgemeine Teilmenge von \mathbb{R}^3 gemeint, welcher einfach wieder gleich F wäre.

Sei $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$.

Definition: Das Vektorfeld

$$\text{rot } K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

auf U heisst die *Rotation von K* . Die englische Bezeichnung ist $\text{curl } K$.

Integralsatz von Stokes: Für alle K und $F \subset U$ wie oben gilt

$$\int_F \operatorname{rot} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial F} K \cdot dx.$$

Bedeutung: Wie im Satz von Green ist die rechte Seite die *Zirkulation von K entlang ∂F* und ist ein Mass dafür, wie sich K mit der Kurve ∂F mitdreht. Die Rotation $\operatorname{rot} K$ misst die lokale Zirkulationsrate für alle möglichen Drehrichtungen im \mathbb{R}^3 , und das Skalarprodukt $\operatorname{rot} K \cdot n$ ist deren Anteil für Drehungen in der Tangentialebene an F . Der Satz von Stokes drückt also die Gesamtzirkulation auf zwei verschiedene Weisen aus.

Beispiel: Sei $K(x) := \omega \times x$ das Geschwindigkeitsfeld einer gleichmässigen Drehung um die Achse $\mathbb{R}\omega$ für $\omega \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann ist überall $\operatorname{rot} K = 2\omega$. Dass die Rotation überall gleich ist, kann man dadurch erklären, dass jede Drehung um eine gegebene Achse sich als Komposition der entsprechenden Drehung um eine beliebige dazu parallele Achse mit einer geeigneten Translation schreiben lässt.

Beispiel: Betrachte die halbe Sphäre $F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0 \right\}$ mit der nach oben, also vom Ursprung weg, gerichteten Orientierung. Ihr Rand ist die Kreislinie mit der von der Parametrisierung $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ induzierten Orientierung. Betrachte das Vektorfeld $K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(z^2 - x^2) \\ x(y^2 - z^2) \\ z(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$ mit $\operatorname{rot} K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2z(x-y) \\ 2z(y-x) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$. Die beiden Seiten im Satz von Stokes berechnen wir direkt bzw. mittels Kugelkoordinaten zu $\frac{\pi}{2}$.

Bemerkung: Ein Vektorfeld K mit $\operatorname{rot} K = 0$ heisst *rotationsfrei*. Nach dem Satz in Abschnitt 11.2 ist dies äquivalent dazu, dass K lokal ein Potential besitzt.

Beispiel: Sei $K(x) := \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$ auf $X := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\omega$ wie im letzten Beispiel in Abschnitt 11.3. Dann ist K rotationsfrei und hat überall lokal ein Potential, aber nicht global. Ausserdem ist für jeden geschlossenen Weg γ in X mit Windungszahl k das Integral $\int_\gamma K(x) \cdot dx = 2\pi k$. Dass dieser Wert nur von der Windungszahl abhängt, kann man mit dem Satz von Stokes erklären. Denn seien γ und γ' zwei geschlossene Wege in X mit Windungszahl k . Dann kann man zeigen, dass eine parametrisierte kompakte Fläche $F \subset X$ existiert mit $\partial F = \gamma + (-\gamma')$. Wegen $\operatorname{rot} K = 0$ gilt somit nach dem Satz von Stokes

$$\int_\gamma K \cdot dx - \int_{\gamma'} K \cdot dx = \int_F \operatorname{rot} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2 = 0.$$

Bemerkung: Wie im Satz von Green sind beide Seiten im Satz von Stokes additiv unter Zerlegung von F . Daher gilt der Satz auch für Flächen, die aus endlich vielen separat parametrisierten Stücken zusammengesetzt sind, sofern deren Orientierungen entlang der Schnittkurven zusammen passen. Der orientierte Rand ∂F einer so zusammengesetzten Fläche $F = F_1 \cup \dots \cup F_r$ entsteht aus $\partial F_1 + \dots + \partial F_r$ durch Streichen aller Schnittkurven, die genau zweimal mit entgegengesetzter Orientierung auftreten. Wenn danach $\partial F = \emptyset$

ist, heisst die Fläche *geschlossen* oder eine *Fläche ohne Rand*. Ein Beispiel dafür ist die Oberfläche jedes hinreichend gutartigen Körpers im \mathbb{R}^3 mit der nach aussen gerichteten Orientierung, wie zum Beispiel eine Sphäre oder die Oberfläche eines Torus. Da für eine geschlossene Fläche die linke Seite im Satz von Stokes automatisch verschwindet, erhalten wir:

Folge: Für jede geschlossene Fläche F besagt der Satz von Stokes

$$\int_F \operatorname{rot} K \cdot n \, d\operatorname{vol}_2 = 0$$