MC-Fragen Serie 8

Einsendeschluss: 13.11.2014, 20:00 Uhr

---

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(b) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

√ (c) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.

Jede Extremalstelle ist ein kritischer Punkt, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel hat $x \mapsto x^3$ einen Terrassenpunkt bei $x = 0$, aber kein (lokales oder globales) Extremum. Die richtige Antwort lautet also (c).

2. Wann ist x_0 ein kritischer Punkt einer Funktion f?

(a) Wenn $f(x_0)$ nicht definiert ist.

(b) Wenn $f'(x_0)$ nicht definiert ist.

√ (c) Wenn $f'(x_0) = 0$ ist.

(d) Wenn man bei x_0 aufpassen muss.

Die korrekte Definition ist (c).

3. Welche der folgenden Funktion besitzt kein Maximum?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

Es gilt $f_1(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2}$. Der Ausdruck wird maximal, wenn der Nenner des Bruchs minimal wird, also genau für $x = 0$. Also ist der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f.

√ (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^3-x}{x^2+2}.$

Die Funktion f_2 besitzt für $x \to \pm\infty$ die durch $y = x$ gegebene Asymptote. Insbesondere gilt $f_2(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Deswegen besitzt f_2 kein Maximum.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{-x^4+x^3+x-1}{x^2+3}.$

Es gilt $f_3(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$. Deswegen ist für jedes hinreichend grosse Intervall das wegen der Stetigkeit von f_3 dort angenommene Maximum schon ein globales Maximum.

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x^2} \cos(x).$

Für $x \neq 0$ gilt $0 < e^{-x^2} < 1$ und $\cos(x) \leq 1$ und damit $f_4(x) < 1$. Wegen $f_4(0) = 1$ ist also der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f_4.

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-x^4}(x^2 - 1).$

Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f_5(x) = 0$ und f_5 nimmt für $|x| > 1$ positive Werte an. Also ist für jedes hinreichend grosse Intervall das dort wegen der Stetigkeit von f_5 angenommene Maximum schon ein globales Maximum.

4. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

(a) nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

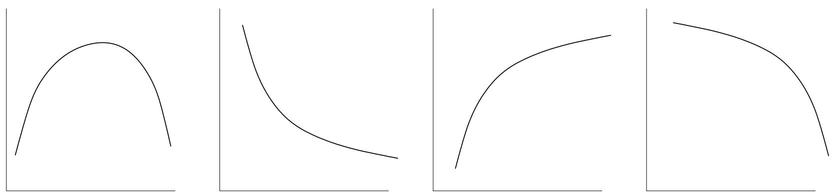
√ (d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

(e) durchaus anwendbar und die Überlegung richtig!

Die Regel von de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞ streben. Für $x = 1$ gilt $x^3+x-2=0$ und $x^2-3x+2=0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

5. Für welche der folgenden Kurven gilt $f'' < 0$?



I II III IV

(a) I und II.

(b) II.

(c) II und III.

(d) I und III.

√ (e) I, III und IV.

Die Bedingung $f'' < 0$ impliziert, dass die Steigung f' streng monoton fällt, also f konkav und somit ihr Graph nach unten gebogen ist. Die richtige Antwort ist daher (e).