D-ITET | Analysis I | HS 2014
Prof. Alessandra Iozzi

MC-Fragen Serie 12

Einsendeschluss: 11.12.2014, 20:00 Uhr

---

1. Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\,dt$ beträgt...

(a) 0.

✓ (b) 1.

(c) 2.

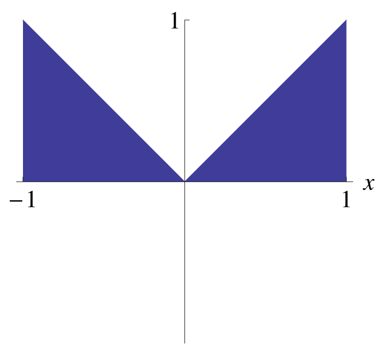
(d) 4.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gelten $|t| = -t$ für $t \leq 0$ und $|t| = t$ für $t \geq 0$. Durch Aufteilung des Integrationsbereichs und Anwendung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |t|\,dt &= \int_{-1}^{0} |t|\,dt + \int_{0}^{1} |t|\,dt \\ &= \int_{-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}t^2\Big|_{0}^{1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Aufgabe geometrisch lösen: Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\,dt$ ist der Inhalt der Fläche, die der Funktionsgraph mit der x-Achse einschliesst:



Die beiden Dreiecke bilden zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, welches den Flächeninhalt 1 hat. Mithin gilt $\int_{-1}^{1} |t|\,dt = 1$.

2. Sei $f : [3, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \int_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung von f?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$.

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$.

(c) $f'(x) = \cos(x)$.

√ (d) $f'(x) = \sin(x)$.

(e) Keine der Gleichungen ist korrekt.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier für f die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und $a = 3$ ein.

Alternativ kann man auch direkt das Integral berechnen und erhält

$$f(x) = \int_3^x \sin(t)dt = -\cos(t)\Big|_{t=3}^{x} = -\cos(x) + \cos(3).$$

Also ist $f'(x) = (-\cos(x) + \cos(3))' = \sin(x)$.

3. Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es in verschiedenen Versionen. Welche ist keine davon?

(a) Falls F eine Stammfunktion von f ist, gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

(b) Die Funktion $t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$ ist eine Stammfunktion von f.

√ (c) Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a)$.

(d) Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ ist differenzierbar mit $F' = f$.

(b) ist Version A und (a) ist Version B des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung. (d) entsteht aus (b), indem man die Definition von Stammfunktion einsetzt. Aussage (c) ist zwar ebenfalls richtig (sie folgt aus dem Mittelwertsatz und wird im Blatter-Skript als Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnet), ist jedoch anders geartet.

4. Welche der folgenden Implikationen für eine Funktion f ist richtig?

(a) f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.

(b) f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

√ (c) f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

(d) f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

Korrekt ist nur (c); die Eigenschaften wurden besprochen. Die Umkehrungen gelten nicht: Zum Beispiel ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig aber nicht differenzierbar, und eine stückweise stetige Funktion wie die Signumsfunktion $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ ist integrierbar aber nicht stetig.

5. Das Integral $\int_0^1 e^{-2t} dt$ ist gleich ...

(a) $1 - \frac{1}{e^2}$.

(b) $\frac{1}{2e^2}$.

(c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}$.

(d) $1 - \frac{1}{2e^2}$.

√ (e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Anwendung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung ergibt

$$\int_0^1 e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}.$$

6. Das Integral $\int_0^\pi \sin(\frac{t}{2}) dt$ ist gleich ...

(a) $-\frac{1}{2}$.

(b) 0.

(c) 1.

√ (d) 2.

(e) 4.

Anwendung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung ergibt

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2\cos\left(-\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{\pi} = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = 2.$$

7. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$\int x^2 \sin(x) dx = \ldots$$

√ (a) $-x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx$.

(b) $x \cos(x) - 2 \int x \cos(x) dx$.

(c) $x^2 \sin(x) + 2 \int x^2 \cos(x) dx$.

(d) $x^2 \sin(x) - 2 \int x^2 \cos(x) dx$.

(e) $-x^2 \cos(x) - 2 \int x \cos(x) dx$.

(f) $x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx$.

Verwende partielle Integration.

8. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \ldots$$

(a) $\int_0^{\log 2} \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

(b) $\int_e^{e^2} \frac{t}{1+t^2} dt$.

(c) $\int_1^{\log 2} \frac{dt}{1+t^2} dt$.

(d) $\int_e^{e^2} \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

√ (e) $\int_e^{e^2} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Wir benutzen die Substitution $t = e^x$, womit $dt = e^x dx$ und $x = 1 \Leftrightarrow t = e, x = 2 \Leftrightarrow t = e^2$.

9. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \ldots$$

(a) $\frac{-1}{1+x^2} + C.$

(b) $(\arctan x)^2 + C$

√ (c) $\frac{1}{2x(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$

(d) $\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} + C.$

(e) $\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} + C.$

√ (f) $\frac{1}{2x(1+x^2)} - \frac{1}{2x} - \frac{\arctan x}{2} + C.$

Es gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Somit ist die erste Antwort falsch. Wir schreiben

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2x}\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

und erhalten mit partieller Integration

$$\int \frac{1}{2x}\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2x(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$$

Deswegen ist die dritte Aussage korrekt. Machen wir eine Bruchzerlegung, dann erhalten wir weiter

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan(x) + C.$$

Somit ist auch die letzte Aussage richtig.

10. Seien $p(x), q(x)$ Polynome und α eine Nullstelle von $q(x)$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Es gibt eine Konstante A, eine Zahl $m \geq 1$ und eine rationale Funktion $R(x)$, die in α keinen Pol hat, so dass
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^m} + R(x).$$

√ (b) Falls α eine einfache Nullstelle von $q(x)$ ist, so gibt es eine Konstante A, eine Zahl $m \geq 1$ und eine rationale Funktion $R(x)$, die in α keinen Pol hat, so dass
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^m} + R(x).$$

√ (c) Falls α eine doppelte Nullstelle von $q(x)$ ist, so gibt es Konstanten A, B und eine rationale Funktion $R(x)$, die in α keinen Pol hat, so dass
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A+Bx}{(x-\alpha)^2} + R(x).$$

√ (d) Falls α eine doppelte Nullstelle von $q(x)$ ist, so gibt es Konstanten A, B und eine rationale Funktion $R(x)$, die in α keinen Pol hat, so dass
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + R(x).$$

Das Beispiel
$$\frac{p(x)}{(q(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$
zeigt, dass die erste Aussage falsch ist, falls $m \neq 1$. Für α einfache Nullstelle, ist es immer möglich $\frac{p(x)}{q(x)}$ als $\frac{A}{x-\alpha} + R(x)$ mit $R(x)$ ohne Polen in α umzuschreiben, somit ist die zweite Aussage richtig. Die letzten zwei Aussagen sind äquivalent, denn $\frac{a+bx}{(x+\alpha)^2} = \frac{b}{x+\alpha} + \frac{a-b\alpha}{(x+\alpha)^2}$ und $\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} = \frac{Bx+(A-\alpha B)}{(x+\alpha)^2}$. Diese Aussagen sind auch richtig, siehe S. 52 in Blatter.