D-ITET | Analysis I | HS 2014
Prof. Alessandra Iozzi

MC-Fragen Serie 10

Einsendeschluss: 27.11.2014, 20:00 Uhr

---

1. Sei L der Differentialoperator

$$L = D^4 + 2D^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $y(0) = 0$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

√ (b) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $y(0) = 1$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(c) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ist ein dreidimensionaler Vektorraum.

(d) Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ mit $y'(0) = 0$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^4 + 2\lambda = (\lambda^2 + 2)\lambda^2$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = i\sqrt{2}, \lambda_2 = -i\sqrt{2}, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ deswegen ist die allgemeine Lösung von $Ly = 0$ (ohne weitere Einschränkungen) $C_1 e^{i\sqrt{2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{2}t} + C_3 + C_4 t$, und es ist ein 4-dimensionaler Vektorraum. Die Einschränkung $y(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0$ ergibt einen 3-dim. Vektorraum. Die Einschränkung $y(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 1$ ergibt einen 3-dim. Vektorraum. Die Einschränkung $y(t) \to 0 (t \to \infty)$ ist erfüllt genau dann, wann $C_4 = 0$ (sonst würde $y(t)$ unbeschränkt sein), $C_1 = C_2 = 0$ (sonst osziliert die Lösung und der Limes existiert nicht) und deswegen auch $C_3 = 0$. Das ergibt einen 0-dimensionalen Vektorraum. Die Einschränkung $y'(0) = 0 \Leftrightarrow i\sqrt{2}C_1 - i\sqrt{2}C_2 + C_4 = 0$ ergibt auch einen 3-dimensionalen Vektorraum.

2. Wir betrachten das Polynom dritter Ordnung $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind richtig?

√ (a) Polynome ungeraden Grades über den reellen Zahlen haben stets mindestens eine reelle Nullstelle.

(b) Da die Koeffizienten alle reell sind, hat $p(x)$ drei reelle Nullstellen.

(c) Das Polynom $p(x)$ hat mindestens auch eine komplexe Nullstelle.

√ (d) Falls $x_1 = u + iv \in \mathbb{C}$, u, $v \in \mathbb{R}$, eine komplexe Nullstelle von $p(x)$ ist, so ist sicher auch $x_2 = u - iv \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle von $p(x)$.

(e) Das Polynom $p(x)$ hat ausschliesslich komplexe Nullstellen.