D-ITET | Analysis I | HS 2014
Prof. Alessandra Iozzi

MC-Fragen Serie 4

Einsendeschluss: 16.10.2014, 20:00 Uhr

---

1. Der Grenzwert von $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{x}+\frac{x-1}{x}\right)$ ist...

(a) ∞.

(b) 0.

(c) 1.

√ (d) 2.

(e) Existiert nicht.

Seien
$$a(x) := \frac{1+x}{x} \quad \text{und} \quad b(x) := \frac{x-1}{x}.$$
Damit ist unser Grenzwert also gegeben durch $\lim_{x\to 0}(a(x)+b(x))$. Da die Grenzwerte separat nicht existieren, beziehungsweise nicht endlich sind, dürfen wir sie nicht auseinanderziehen und separat berechnen. Wir können jedoch direkt rechnen
$$\lim_{x\to 0}(a(x)+b(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2.$$

2. Satz. Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

[Beweis] Sei $P(n)$ die Aussage, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Offensichtlich ist $P(1)$ wahr.

Im k-ten Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und beweisen $P(k+1)$. Dazu betrachten wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k + 1$ Pferde die gleiche Farbe.

Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Wo liegt der Fehler in diesem Induktionsbeweis?

(a) Der Induktionsanfang fehlt.

(b) Der Induktionsanfang ist falsch.

√ (c) Der Induktionsschritt ist für $k = 1$ falsch.

(d) Der Induktionsschritt ist für alle $k \in \mathbb{N}$ falsch.

(e) Vollständige Induktion lässt sich nur anwenden, wenn es für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage zu beweisen gibt. Da es nur endlich viele Pferde gibt, ist das hier nicht der Fall.

Sei N die Zahl aller Pferde. Es ist keineswegs so, dass die Aussage $P(k)$ für $k > N$ nicht existiert oder keinen Sinn ergibt, sondern sie hat dann die Form "Für alle Elemente der leeren Menge gilt..." und ist damit trivialerweise wahr. Abgesehen davon kann man die Methode der vollständigen Induktion durchaus auch verwenden, wenn man nur N Aussagen $P(1), \ldots, P(N)$ zu beweisen hat. Der Beweis bricht dann zwar beim N-ten Induktionsschritt ab, aber das ist nicht relevant für den induktiven Beweis der ersten N Aussagen. Deswegen ist (e) kein berechtigter Einwand.

Der Induktionsanfang ist die Aussage, dass $P(1)$ wahr ist - was auch tatsächlich so ist, denn in einer "Ansammlung" von einem Pferd haben alle Pferde die gleiche Farbe. (a) und (b) sind also nicht die richtigen Antworten auf unsere Frage.

Der Haken liegt beim ersten Induktionsschritt, also beim Übergang von $k = 1$ zu $k = 2$: Wenn wir von zwei Pferden eines wegschicken, sagt uns die Induktionsvoraussetzung nur, dass das übrige Pferd eine bestimmte Farbe hat. Das gleiche gilt, wenn wir das andere Pferd wegschicken. Daraus können wir aber nicht schliessen, dass die jeweilige Farbe für beide übereinstimmt, weil es kein Pferd gibt, das Teil beider Gruppen von übrig gebliebenen Pferden ist. (c) ist daher die korrekte Antwort.

Für alle $k \geq 2$ ist der Induktionsschritt dagegen korrekt, weil es jeweils mindestens ein Pferd gibt, das nicht weggeschickt wird und die gleiche Farbe wie alle anderen hat. (d) ist demnach nicht die richtige Antwort.

3. Die Asymptote(n) der Funktion $f(x) := \frac{x^2+2x-4}{x+2}$ ist / sind...

√ (a) Die Funktion $g(x) = x$ und die vertikale Gerade bei $x = -2$.

(b) Nur die Funktion $g(x) = x$.

(c) Nur die vertikale Gerade bei $x = -2$.

(d) Die Funktion $f(x)$ besitzt keine Asymptoten.

(e) Es existiert eine Asymptote, jedoch keine von den oben erwähnten.

Es gilt

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

Somit ist die vertikale Gerade bei $x = -2$ eine Asymptote. Ausserdem erhalten wir

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = 0.$$

Also ist die Gerade $h(x) = x$ eine Asymptote. In der Tat gilt

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - h(x)) = 0.$$

(Für $x \to -\infty$ haben wir auch noch eine Asymptote, sie entspricht in diesem Beispiel allerdings gerade $g(x) = x$.)