MC-Fragen Serie 6

Einsendeschluss: 30.10.2014, 20:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Aussagen ist für alle $z \in \mathbb{C}$ richtig?

(a) $\Re(\exp(z)) = \exp(\Re(z))$.

(b) $\Im(\exp(z)) = \exp(\Im(z))$.

(c) $|\exp(z)| = \exp(|z|)$.

√ (d) $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$.

(e) $|\exp(z)| = \exp(\Im(z))$.

Wir schreiben $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Aus $\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a)\exp(ib) = \exp(a)(\cos(b) + i\sin(b))$ folgen

$$\Re(\exp(z)) = \exp(a)\cos(b)$$

und

$$\Im(\exp(z)) = \exp(a)\sin(b).$$

Wählt man z.B. $z = \frac{\pi i}{2}$, dann ist $\Re(\exp(z)) = \cos(\pi/2) = 0 \neq \exp(\Re(z)) = 1$. Wählt man $z \in \mathbb{R}$, dann ist $\Im(\exp(z)) = \exp(a)\sin(0) = 0 \neq 1 = \exp(0) = \exp(\Im(z))$. Also sind (a) und (b) falsch. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
|\exp(z)| &= |\exp(a + ib)| \\
&= \sqrt{\exp(2a)(\cos^2(b) + \sin^2(b))} \\
&= \sqrt{\exp(2a)} \\
&= \sqrt{\exp(a)\exp(a)} \\
&= \exp(a) \\
&= \exp(\Re(z)).
\end{aligned}$$

Somit ist also (d) sicher richtig. Da $\exp(|z|) = \exp(\sqrt{a^2 + b^2})$ und $\exp(\Im(z)) = \exp(b)$ gilt, sind (c) und (e) allgemein nicht korrekt.

2. Es seien $a > 1$ und $b > 1$ reelle Zahlen und es seien Funktionen $e_a, e_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto a^x$ bzw. $x \mapsto b^x$. Dann unterscheiden sich e_a und e_b ...

(a) um eine additive Konstante.

(b) um eine multiplikative Konstante.

√ (c) durch eine Stauchung oder Streckung in Richtung der x-Achse.

(d) nur durch das Vorzeichen.

Es gilt

$$b^x = (e^{\log b})^x = (e^{(\log a \cdot \log b)/\log a})^x = (e^{\log a})^{(\log b/\log a)x} = a^{(\log b/\log a)x},$$

d.h.

$$e_b(x) = e_a((\log b/\log a)x).$$

Die Funktion e_b ist also die Komposition von e_a mit der durch $x \mapsto (\log b/\log a)x$ definierten Funktion, und letztere ist eine Streckung oder Stauchung der x-Achse (je nachdem, ob $b > a$ oder $a > b$ gilt). Also ist (c) richtig.

(a), (b) bzw. (d) besagen die Beziehung $e_b(x) = e_a(x) + C$ bzw. $e_b(x) = C \cdot e_a(x)$ bzw. $e_b(x) = -e_a(x)$, wobei C eine reelle Zahl ist. All das ist nicht der Fall, d.h. (c) ist die einzige richtige Antwort.

3. Es seien $a > 1$ und $b > 1$ zwei reelle Zahlen. Dann unterscheiden sich die Funktionen $\log_a, \log_b :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ...

(a) um eine additive Konstante.

√ (b) um eine multiplikative Konstante.

(c) so stark, dass man sie gesondert untersuchen muss.

(d) nur durch das Vorzeichen.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für jedes $a > 1$ und jedes $x > 0$ die Beziehung

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

gilt, wobei log der natürliche Logarithmus ist. Daraus folgt

$$\frac{\log_b x}{\log_a x} = \frac{\log a}{\log b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \log_b x = \frac{\log a}{\log b} \log_a x$$

für alle $x > 0$. Also unterscheiden sich $\log_a$ und $\log_b$ um die multiplikative Konstante $\frac{\log a}{\log b}$ und (b) ist damit richtig.

(a) und (d) drücken die Beziehungen $\log_b x = \log_a x + C$ bzw. $\log_b x = -\log_a x$ aus, die jeweils im Allgemeinen falsch sind. (c) ist falsch, da (b) gilt.

4. Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, die gegeben sind durch

$$f(x) := x^{\sqrt{x}}, \quad g(x) := (\sqrt{x})^x, \quad h(x) := e^{x^{3/2}}.$$

Welche Aussage über das Verhalten der Funktionen für $x \to \infty$ ist richtig? Für $x \to \infty$ wächst ...

(a) h am langsamsten.

(b) f am schnellsten.

(c) g am schnellsten.

√ (d) g schneller als f aber langsamer als h.

Es gelten $f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$ und $g(x) = (\sqrt{x})^x = e^{x \ln\sqrt{x}} = e^{\frac{1}{2}x\ln x}$. Da $x \mapsto \frac{1}{2}x$ schneller wächst als $x \mapsto \sqrt{x}$, wächst $\frac{1}{2}x\ln x$ schneller als $\sqrt{x}\ln x$ und damit g schneller als f. Da ln langsamer wächst als jede positive Potenz, insbesondere langsamer als $x \mapsto \sqrt{x}$, wächst $\frac{1}{2}x\ln x$ langsamer als $x \cdot \sqrt{x} = x^{3/2}$ und damit g langsamer als h. Also ist (d) und nur (d) richtig.