MC-Fragen Serie 9

Einsendeschluss: 20.11.2014, 20:00 Uhr

---

1. Die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1-2x^2}$ lautet...

(a) $1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \dots$

(b) $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \dots$

√ (c) $1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 - \dots$

(d) $1 - x^2 - x^4 - 3x^6 - \dots$

(e) $1 - x^2 + x^4 - 3x^6 + \dots$

Die Binomialreihe besagt

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-2x^2} &= (1 + (-2x^2))^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \cdot (-2x^2)^k \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2x^2) + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}}{2} \cdot (-2x^2)^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{6} \cdot (-2x^2)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{2}{2} \cdot x^2 - \frac{4}{8} \cdot x^4 - \frac{24}{48} \cdot x^6 + \dots \\
&= 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \dots .
\end{aligned}$$

Also ist (c) richtig.

2. Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

(a) $(1-x)^{-1}$.

(b) $(1-x)^{-2}$.

(c) $(1+x)^{-2}$.

√ (d) $x \cdot (1-x)^{-2}$.

(e) $x \cdot (1-x)^{-3}$.

Antwort (d) ist korrekt. Ein Lösungsweg ist Ausrechnen jeder der 5 Funktionen mit der Binomialreihe und Koeffizientenvergleich bzw. Taylorentwickling. Für einen anderen Lösungsweg erinnert man sich an die Formeln

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

und

$$(1-x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$

Deren Differenz ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} kx^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= (1-x)^{-2} - (1-x)^{-1} = x \cdot (1-x)^{-2}.\end{aligned}$$

Ein dritter Lösungsweg benutzt die Ableitung mit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} kx^k &= \sum_{k=0}^{\infty} x \cdot (x^k)' = x \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} x^k)' \\ &= x \cdot ((1-x)^{-1})' = x \cdot (1-x)^{-2}.\end{aligned}$$

3. Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

(a) $\sin(x) + \sinh(x)$.

$\surd$ (b) $x\sin(x) + \frac{1}{x}\sinh(x)$.

(c) $x\sin(x) + x\sinh(x)$.

(d) $x\cos(x) + \frac{1}{x}\cosh(x)$.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x}\sinh(x)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ x^{2k+2}}{(2k+1)!} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x\sin(x)$$

ist (b) richtig.

4. Das Restglied in der Taylorentwicklung von f an der Stelle x_0 ist gleich ...

(a) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$.

(b) $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ mit τ zwischen x_0 und x.

$\surd$ (c) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ mit τ zwischen x_0 und x.

(d) $R_n(x) = f^{(n+1)}(\tau) \cdot (x - x_0)^{n+1}$ mit τ zwischen x_0 und x.

Die korrekte Antwort ist (c).

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

$\surd$ (c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

(c) ist falsch. Ein Beispiel ist die Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$. Diese ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre Taylorreihe bei $x_0 = 0$ ist identisch gleich 0 und daher für $x \neq 0$ verschieden von $f(x)$. Die übrigen Aussagen sind richtig.

6. *Hinweis für dies Aufgabe:* Benutze das Skript von Blatter. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(\xi) = 0$ für ein $\xi \in I$ und sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmte Folge in I mit $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$. Was bedeutet die quadratische Konvergenz des Verfahrens? Es gibt ...

(a) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon^2$.

(b) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - \xi| < \varepsilon^2$.

√ (c) ein $C > 0$ und ein $N > 0$ so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2$.

(d) ein $C > 0$ und ein $N > 0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - \xi| \leq C\frac{1}{n^2}$.

"Quadratische Konvergenz" ist eine stärkere Eigenschaft als "Konvergenz", d.h. jede quadratisch konvergente Folge ist auch konvergent, aber nicht umgekehrt. Wie aus der Vorlesung bekannt, ist (c) die richtige Definition.

Die Forderung in (d) ist echt schwächer als die nach quadratischer Konvergenz. Sie wird zum Beispiel von der durch $x_n = \xi + \frac{1}{n^2}$ gegebenen Folge erfüllt (mit $C = N = 1$), aber diese ist nicht quadratisch konvergent: Es gilt nämlich

$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^2} = \frac{n^4}{(n+1)^2} \to \infty \quad \text{für } n \to \infty,$$

und damit erfüllt (x_n) die Forderung in (c) für keine Wahl von C und N.

Jede Folge (x_n) mit $x_n \to \xi$, z.B. die aus dem vorigen Absatz, hat die Eigenschaften in (a) und (b). Das folgt durch Anwendung der Dreiecksungleichung bzw. direkt aus der Definition der Konvergenz. Sie sind also ebenfalls echt schwächer als die in (c) geforderte.