D-ITET Analysis I HS 2014
Prof. Alessandra Iozzi

MC-Fragen Serie 5

Einsendeschluss: 23.10.2014, 20:00 Uhr

---

1. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

√ (a) Die Folge ist monoton fallend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist konvergent.

(d) Die Folge ist monoton wachsend.

(e) Der Limes der Folge ist 1.

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$, d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergiert gegen 1. Also lautet die richtige Antwort (a) und nur (a).

2. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert?

(a) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a| > 1/n$.

√ (b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| > \varepsilon$.

(c) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| > \varepsilon$.

Die Formalisierung der Aussage "(a_n) konvergiert in $\mathbb{R}$" lautet

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Die Negation der Aussage erhält man, indem man die Quantoren $\exists$ und $\forall$ vertauscht und die Aussage $|a_n - a| \leq \varepsilon$ durch ihre Negation ersetzt, also durch $|a_n - a| > \varepsilon$. Folglich drückt (b) aus, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Jede konstante Folge (d.h. mit $a_n = c \in \mathbb{R}$ für alle n) erfüllt Aussage (a), und zwar für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $|c - a| > 1$, obwohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich gegen c konvergiert.

Die durch $a_n = \frac{1}{n}$ gegebene Folge liefert ein Beispiel für eine Folge, die konvergiert (nämlich gegen 0) und dennoch (c) erfüllt: sei zunächst $a \neq 1$. Dann wähle man $\varepsilon = |1 - a|/2, n_0 = 1, n = 1$. Damit gilt $|a_1 - a| > \varepsilon$. Für $a = 1$ wähle man $\varepsilon = 1/4, n_0 = 2$ sowie $n = 2$. Dann folgt $|a_1 - a| > \varepsilon$. Also gilt (c).

3. Welche der folgenden Begründungen für Aussagen über eine Reihe ist logisch korrekt?

(a) Die Reihe hat unendlich viele Glieder, die alle grösser als Null sind. Daher divergiert die Reihe.

(b) Bei jedem Schritt addiert man weniger dazu als beim vorangegangenen. Daher konvergiert die Reihe.

(c) Die Folge der Partialsummen der Reihe ist monoton. Daher konvergiert die Reihe.

√ (d) Alle Glieder der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert. Daher konvergiert die Reihe absolut.

(a) ist falsch für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ für $0 < q < 1$, und (b) und (c) sind falsch für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dagegen ist (d) korrekt, denn wenn alle Reihenglieder positiv sind, so ist die Reihe gleich der Reihe der Absolutbeträge und die letztere konvergiert dann auch.

4. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$...

(a) konvergiert.

(b) divergiert gegen $+\infty$.

(c) divergiert gegen $-\infty$.

√ (d) hat keine der anderen genannten Eigenschaften.

Die Partialsummen sind abwechselnd 1 und 0. Also hat die Reihe weder einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ noch einen uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$. Somit ist (d) richtig.

5. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) $i^2 = -1$.

(b) $\frac{1}{i} = -i$.

(c) $i^3 = -i$.

(d) $i^{17} = i$.

√ (e) $\frac{1}{i^4} = -1$.

Die imaginäre Einheit i erfüllt $i^2 = -1$, und daraus folgen $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$ und $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Damit sind zunächst (a) und (c) richtig; dass (b) ebenfalls richtig und (e) falsch ist, ergibt sich durch Multiplikation mit dem jeweiligen Nenner. Aus $i^4 = 1$ folgt weiter

$$i^{17} \;=\; i^{4\cdot 4+1} \;=\; (i^4)^4 \cdot i \;=\; 1^4 \cdot i \;=\; i,$$

d.h. auch (d) ist richtig.

6. Für die komplexe Zahl $z = (3+2i)^3$ gilt...

(a) $z = 27 + 8i$.

√ (b) $z = -9 + 46i$.

(c) $z = -9 + 10i$.

(d) $z = -9 - 46i$.

Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt die binomische Formel $(w+z)^3 = w^3+3w^2z+3wz^2+z^3$. In unserem Fall liefert das

$$\begin{aligned} z &= 3^3 + 3\cdot 3^2 \cdot (2i) + 3 \cdot 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 \\ &= -9 + 46i. \end{aligned}$$

7. Für die komplexe Zahl $z = \frac{3+2i}{4-i}$ gilt...

√ (a) $z = \frac{10+11i}{17}$.

(b) $z = \frac{17}{8i+2}$.

(c) $z = \frac{14+5i}{17}$.

(d) $z = \frac{5+14i}{17}$.

Durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners erhält man

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3+2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \\ &= \frac{(3+2i)(4+i)}{4^2+1^2} \\ &= \frac{10+11i}{17}. \end{aligned}$$

8. Sei $z = 2 - 3i$. Welches ist die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$?

(a) $2 - 3i$.

√ (b) $2 + 3i$.

(c) $-2 - 3i$.

(d) $3 - 2i$.

(e) $3i$.

Ganz allgemein ist für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ das komplex Konjugierte $\overline{z} = a - ib$.