D-ITET | Analysis I | HS 2014

Prof. Alessandra Iozzi

MC-Fragen Serie 11

Einsendeschluss: 4.12.2014, 20:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Sei $\omega > 0, \omega \neq 1$.

(a) Die Differentialgleichung $y''(t) + \omega y(t) = \cos(\omega t)$ hat genau eine Lösung, die für $t \to \infty$ nicht beschränkt ist.

$\surd$ (b) Alle Lösungen der Differentialgleichung $y''(t) + \omega y(t) = \cos(\omega t)$ sind für $t \to \infty$ beschränkt.

(c) Keine der Lösungen der Differentialgleichung $y''(t) + \omega y(t) = \cos(\omega t)$ ist für $t \to \infty$ beschränkt.

(d) Für alle Lösungen der Differentialgleichung $y''(t) + \omega y(t) = \cos(\omega t)$ gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$.

(e) Für alle Lösungen der Differentialgleichung $y''(t) + \omega y(t) = \cos(\omega t)$ gilt $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = +\infty$.

Das charakteristische Polynom der homogene Gleichung ist $\lambda^2 + \omega$ mit Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega}$, deswegen die homogene Lösung y_h ist $C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ und ist immer beschränkt. Für der partikuläre Lösung benutzen wir den Ansatz $y_p(t) = Ae^{i\omega t}$ und erhalten $y_p''(t) + \omega y_p(t) = e^{i\omega t} \Leftrightarrow (\omega - \omega^2)Ae^{i\omega t} = e^{i\omega t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\omega(1-\omega)}$. Weil $\omega \notin \{0, 1\}$, ist y_p auch beschränkt, somit sind alle Lösungen beschränkt.

2. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist;} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht? Und was ist die richtige Begründung? Die Funktion f ist ...

(a) integrierbar, weil sie beschränkt ist.

(b) nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.

(c) integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.

√ (d) nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0,1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.

Die Funktion ist nicht integrierbar, und die richtige Begründung ist die in (d): Für jede Zerlegung von $[0,1]$ hängt die entsprechende Riemann-Summe für f von der Wahl der Stützstellen ξ_i ab. Z.B. kann man sie so wählen, dass $f(\xi_i) = 0$ oder aber $f(\xi_i) = 1$ für alle i gilt, und die entsprechenden Riemann-Summen haben dann den Wert 0 bzw. 1. Das widerspricht der Definition der Riemann-Integrierbarkeit.

Insbesondere liefert f ein Beispiel für eine auf einem kompakten Intervall definierte und beschränkte Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist. Der Schluss in (a) ist also falsch. Genauso ist der in (c) falsch, wie ebenfalls die obige Argumentation zeigt.

Auch die Begründung in (b) ist falsch. Ein Beispiel für eine unstetige aber dennoch Riemann-integrierbare Funktion liefert die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn} : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

3. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$,

√ (b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,du$,

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,dx$,

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,dt$.

Aus (a) entsteht (d) durch die Substitution $x = t$. Aus (a) entsteht (c) durch Vertauschen der Grenzen, wobei das entstehende Minuszeichen in den Integranden hineingenommen wurde. Dagegen wurde in (b) wohl die Substitution $x = u$ nur unvollständig ausgeführt. Formal ist (b) das Integral der (in u!) konstanten Funktion $u \mapsto f(x) - g(x)$, also etwas ganz anderes als (a). Die korrekte Antwort lautet also (b).