MC-Fragen Serie 7

Einsendeschluss: 6.11.2014, 20:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) $2h^3 + h^4 = o(h)$ für $h \to 0$.

(b) $2h^3 + h^4 = o(h^2)$ für $h \to 0$.

(c) $2h^3 + h^4 = o(2h^2)$ für $h \to 0$.

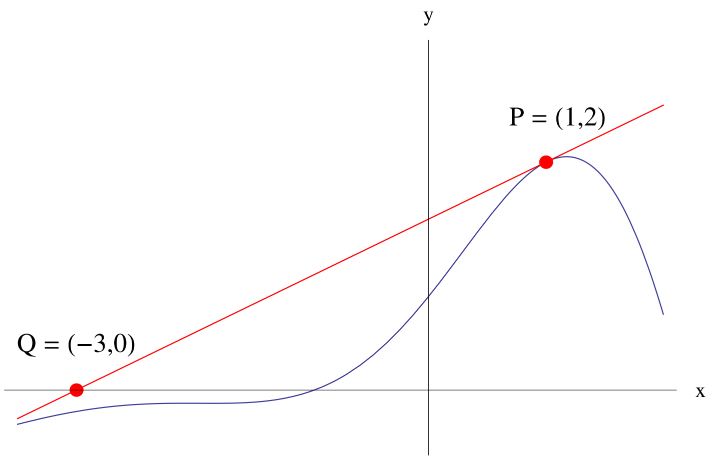
√ (d) $2h^3 + h^4 = o(h^3)$ für $h \to 0$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bedeutet $2h^3 + h^4 = o(Ch^\alpha)$ *für* $h \to 0$, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h^3 + h^4}{Ch^\alpha} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{2h^{3-\alpha}}{C} + \frac{h^{4-\alpha}}{C} \right) = 0$$

ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\alpha < 3$ gilt, insbesondere spielt der Wert der Konstanten C keine Rolle. Also sind die Aussagen in (a), (b) und (c) korrekt, die in (d) dagegen falsch.

2. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2.

√ (b) $\frac{1}{2}$.

(c) $-\frac{2}{3}$.

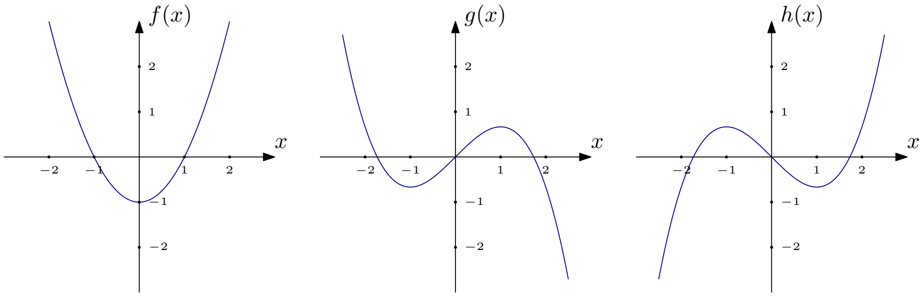
(d) -2.

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

3. Das folgende Bild zeigt die Graphen dreier Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist. Welche Aussage ist richtig?



(a) $f' = g$.

Falsch. Z.B. ist die Steigung von f bei $x = -2$ negativ, aber $g(-2) > 0$.

(b) $f' = h$.

Falsch. Z.B. wechselt die Ableitung von f zwischen -2 und -1 das Vorzeichen nicht, da die Steigung dort immer negativ ist. Aber es ist $h(-2) < 0$ und $h(-1) > 0$.

(c) $g' = f$.

Falsch. Z.B. ist die Steigung von g bei $x = -2$ negativ, aber $f(-2) > 0$.

(d) $g' = h$.

Falsch. Z.B. ist die Steigung von g im Nullpunkt positiv, aber $h(0) = 0$.

$\surd$ (e) $h' = f$.

Richtig!

(f) $h' = g$.

Falsch. Z.B. ist die Steigung von h im Nullpunkt negativ, aber $g(0) = 0$.

4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f ist stetig $\iff$ f ist differenzierbar.

(b) f ist stetig $\implies$ f ist differenzierbar.

$\surd$ (c) f ist stetig $\impliedby$ f ist differenzierbar.

Jede differenzierbare Funktion ist stetig, also ist (c) richtig. Aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, zum Beispiel $x \mapsto |x|$. Also sind (a) und (b) falsch.

5. Für $a \in \mathbb{R}$ sei eine Teilmenge $M_a \subset \mathbb{R}$ definiert durch $M_a := \{a^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Welche Aussage ist *falsch*?

(a) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist das Infimum $\inf M_a \in [-\infty, \infty)$ definiert.

Richtig, denn das Infimum jeder beliebigen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert, wenn man auch die Werte $-\infty$ und ∞ zulässt. Man beachte, dass $\inf M = \infty$ nur für $M = \emptyset$ gilt.

√ (b) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ besitzt M_a das Minimum 0.

Falsch: Für jedes solche a und jedes hinreichend grosse n unterschreitet a^n zwar jeden beliebig kleinen positiven Wert, aber es gilt immer $0 < a^n$, d.h. $0 \notin M_a$. Deswegen gilt $\inf M_a = 0$, aber M_a besitzt kein Minimum.

(c) Für jedes $-1 \leq a < 0$ besitzt M_a sowohl ein Minimum als auch ein Maximum.

Richtig: Die durch $x_n := |a^n| = |a|^n$ gegebene Folge fällt monoton. Man beachte ausserdem, dass $x_n < 0$ für jedes ungerade n gilt und $x_n > 0$ für jedes gerade n. Deswegen existieren Minimum und Maximum von M_a und sind gegebend durch $\min M_a = x_1 = a$ und $\max M_a = x_2 = a^2$.

(d) Für jedes $a > 1$ besitzt M_a ein Minimum.

Richtig: Die durch $x_n := a^n$ gegebene Folge wächst für $a > 1$ monoton, deswegen besitzt M_a ein Minimum, nämlich $\min M_a = x_1 = a$.

(e) Für jedes $0 < a < 1$ besitzt M_a ein Maximum.

Richtig: In diesem Fall fällt die durch $x_n := a^n$ gegebene Folge monoton, d.h. das Maximum existiert und es gilt $\max M_a = x_1 = a$.