MC-Fragen Serie 13

Einsendeschluss: 18.12.2014, 20:00 Uhr

---

1. Wir rechnen

$$f(x) = (x-1)^4 = \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx$$
$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x)$$

und erhalten durch Einsetzen

$$1 = f(0) = g(0) = 0.$$

Wo liegt der Fehler?

(a) Man darf nicht einsetzen.

(b) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

√ (c) Die Integrationskonstante fehlt.

(d) Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.

Die korrekte Antwort ist (c). Gleichungen für unbestimmte Integrale gelten immer nur bis auf eine Integrationskonstante; diese darf man nur solange unterschlagen, wie auf beiden Seiten einer Gleichung ein unbestimmtes Integral stehen bleibt. Die falsche Rechnung illlustiert, was andernfalls passieren kann.

2. Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi.$

(b) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = \sin(\phi)\sin(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi.$

(c) $\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx.$

(d) $\int 2x^2 e^{x^2}\,dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx.$

√ (e) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

Alle Rechnungen sind richtig; die Antwort lautet also (e). In (a) wird $\sin(\phi)$ integriert und $\cos(\phi)$ differenziert; in (b) ist es umgekehrt. Obwohl die rechten Seiten verschieden aussehen, stimmen sie bis auf eine Integrationskonstante überein, da nach Pythagoras $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ ist. In (c) wird x integriert und $\log(x)$ differenziert. In (d) schreibt man den Integranden in der Form $x \cdot 2xe^{x^2}$ und integriert $2xe^{x^2}$ und differenziert x.

3. Welche Substitution, falls überhaupt notwendig, ist im folgenden Integral günstig?

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}\,dx$$

(a) Substitution mit $t = \tan(x)$ und folglich mit $\sin(x) = t \cdot \cos(x)$ und $dt = \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

(b) Substitution mit $t = \sin(x)$ und folglich mit $dt = \cos(x)\,dx$.

√ (c) Substitution mit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und folglich mit $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

(d) Keine Substitution ist notwendig, denn die Gleichung $(\sin^3)'(x) = \cos^2(x)$ und die Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ führen direkt zur Lösung.

Die Substitution (a) verkompliziert alles und erfordert sogar eine Quadratwurzel, um $\sin(x)$ durch $\cos(x)$ auszudrücken. Die Substitution (b) ist schon besser, weil sie den Nenner vereinfacht; jedoch bleibt auch bei ihr ein Ausdruck $\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$ im Zähler stehen. Solche Quadratwurzeln bekommt man nur durch eine trigonometrische Substitution wieder weg – deshalb hat das nichts gebracht. Sinnvoll wäre dagegen die Substitution $t = \cos(x)$ mit $dt = -\sin(x)\,dx$, bei der nur noch eine rationale Funktion in t übrig bleibt. Nicht ganz so gut, aber immer noch günstig ist die Substitution (c), die bei jeder rationalen Funktion in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ funktioniert. Die angebotene Antwort (d) ist falsch, da $(\sin^3)'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$ ist. Also ist die korrekte Antwort (c).