Mathematik II
Frühlingsemester 2015
Kapitel 8: Lineare Algebra
8.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/other/mathematik2_biol

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/~farkas

Ein einführendes Beispiel

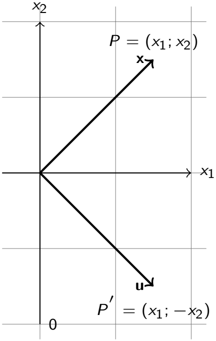
Wir betrachten die *Spiegelung* eines beliebigen Punktes $P = (x_1; x_2)$ an der x_1-Achse einer Ebene.
Der Punkt P geht dabei in den " Bildpunkt " $P' = (u_1; u_2)$ über.
Die *Transformationsgleichungen* können wir unmittelbar aus dem Bild ablesen:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \\ u_2 &= -x_2 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \\ u_2 &= 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Wir bringen diese Gleichung noch in die *Matrizenform*:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ein einführendes Beispiel



Der Vektor $\mathbf{x}$ ist dabei der *Ortsvektor* des Punktes P, der Vektor $\mathbf{u}$ der *Ortsvektor* des zugehörigen Bildpunktes P'.
Jetzt interessieren wir uns ausschliesslich für alle diejenigen (vom Nullvektor *verschiedenen*) Ortsvektoren, die bei dieser Spiegelung in einen Vektor *gleicher* Richtung oder *Gegenrichtung* übergehen.

Ein einführendes Beispiel

Diese (noch unbekannten) Vektoren genügen also der Bedingung

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$$

und somit der folgenden Matrizengleichung:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dabei ist **E** die 2-reihige *Einheitsmatrix*.
Die als *charakteristische Matrix* von **A** bezeichnete Matrix $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ besitzt die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Die Matrizengleichung lautet daher in ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein einführendes Beispiel

Dieses *homogene lineare Gleichungssystem* mit den beiden unbekannten Koordinaten x_1 und x_2 enthält noch einen (ebenfalls unbekannten) Parameter λ und ist bekanntlich nur dann nicht-trivial lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante *verschwindet*, d.h.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

Hieraus erhalten wir die sog. *charakteristische Gleichung* der Matrix **A**:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung heißen Eigenwerte der Matrix A.
Sie lauten hier also:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Zu diesen Eigenwerten gehören bestimmte Ortsvektoren, die in diesem Zusammenhang als *Eigenvektoren* der Matrix **A** bezeichnet werden.

Ein einführendes Beispiel

Man erhält sie, indem man in das homogene lineare Gleichungssystem für den Parameter λ den jeweiligen *Eigenwert* einsetzt und anschliessend das Gleichungssystem löst.
Mit der Bestimmung dieser Eigenvektoren wollen wir uns jetzt näher befassen.

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$
Einsetzen des *ersten* Eigenwertes $\lambda_1 = 1$ liefert das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System *reduziert* sich auf die *eine* Gleichung

$$-2x_2 = 0$$

mit der *Lösung* $x_2 = 0$.

Da die *erste* Unbekannte x_1 in dieser Gleichung *nicht* auftritt, dürfen wir über x_1 *frei verfügen* und setzen daher $x_1 = \alpha$.
Das Gleichungssystem besitzt damit die von dem *reellen Parameter* α abhängige Lösung

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörige *Eigenvektor* ist somit bis auf einen *beliebigen konstanten* Faktor $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt.
Wir wählen $\alpha = 1$ und erhalten den *normierten Eigenvektor*

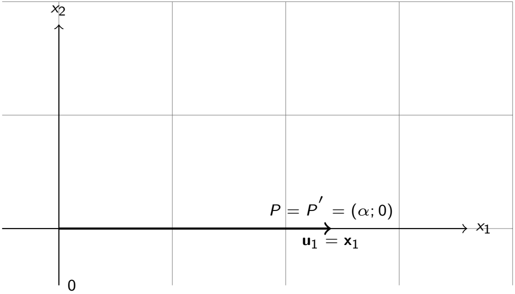
$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alle weiteren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektoren sind dann ein *Vielfaches* (α-faches) des *normierten* Eigenvektors $\tilde{\mathbf{x}}_1$ ($\alpha \neq 0$).
In der Praxis beschränkt man sich daher auf die Angabe dieses Eigenvektors und betrachtet $\tilde{\mathbf{x}}_1$ als den zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektor.

Ein einführendes Beispiel

Geometrische Deutung:
Die zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektoren sind die *Ortsvektoren* der auf der x_1-Achse liegenden Punkte, die bei der Spiegelung an dieser Achse *in sich selbst* übergehen (ausgenommen ist der Nullpunkt).

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_1 \text{ Achse}]{\text{Spiegelung an der}} \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}_1$$



Ein einführendes Beispiel

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$

Wir setzen jetzt den *zweiten* Eigenwert $\lambda_2 = -1$ in die Gleichung ein und erhalten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System *reduziert* sich auf die *eine* Gleichung

$$2x_1 = 0$$

mit der Lösung $x_1 = 0$.
Die *zweite* Unbekannte tritt in dieser Gleichung *nicht* auf, darf daher *frei gewählt* werden.
Wir setzen $x_2 = \beta$ und erhalten für das Gleichungssystem die von dem *reellen Parameter* β abhängige Lösung

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = -\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Ein einführendes Beispiel

Wiederum ist der Eigenvektor bis auf einen *beliebigen konstanten* Faktor $\beta \neq 0$ eindeutig bestimmt.
Wir wählen $\beta = 1$ und erhalten so den *normierten Eigenvektor*

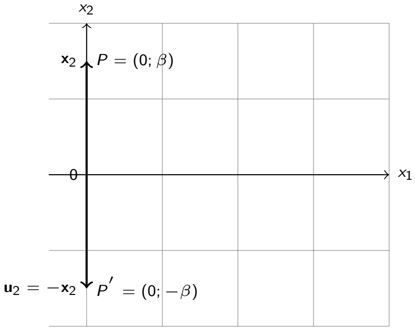
$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle weiteren *zum* Eigenwert $\lambda_2 = -1$ gehörenden Eigenvektoren sind dann ein *Vielfaches* (β-faches) dieses *normierten* Eigenvektors $\tilde{\mathbf{x}}_2$ ($\beta \neq 0$).

Ein einführendes Beispiel

Geometrische Deutung:
Die zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ gehörenden Eigenvektoren sind die *Ortsvektoren* der auf der x_2-Achse liegenden Punkte, die bei der Spiegelung an der x_1-Achse in den jeweiligen *Gegenvektor* übergehen.

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[x_1 \text{ Achse}]{\text{Spiegelung an der}} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \end{pmatrix} = -\mathbf{x}_2$$



Ein einführendes Beispiel

Fazit
Die *Eigenvektoren* der Transformationsmatrix **A** sind in diesem Beispiel diejenigen (vom Nullvektor *verschiedenen*) *Ortsvektoren*, die bei der Spiegelung an der x_1-Achse entweder *in sich selbst* oder in den entsprechenden *Gegenvektor* übergehen.
Die beiden Eigenwerte haben folgende *geometrische* Bedeutung:

- $\lambda_1 = 1$**:**
  Richtung und Länge des Ortsvektor bleiben bei der Spiegelung *erhalten* (Punkte auf der x_1-Achse mit *Ausnahme* des Nullpunktes)
- $\lambda_2 = -1$**:**
  Richtungsumkehr des Ortsvektor bei der Spiegelung
  (Punkte auf der x_2-Achse mit *Ausnahme* des Nullpunktes)

Die Spiegelung an der x_1-Achse haben wir in eindeutiger Weise durch die 2-reihige *Transformationsmatrix*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschreiben können.

Ein einführendes Beispiel

Die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* dieser Matrix lieferten uns dabei diejenigen Ortsvektoren, die bei dieser Spiegelung entweder *unverändert* bleiben oder aber eine *Richtungsumkehr* erfuhren.
Man nennt allgemein ein Problem dieser Art ein *Matrixeigenwertproblem*.

Die Aufgabe besteht dann darin, die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der vorgegebenen (quadratischen) Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

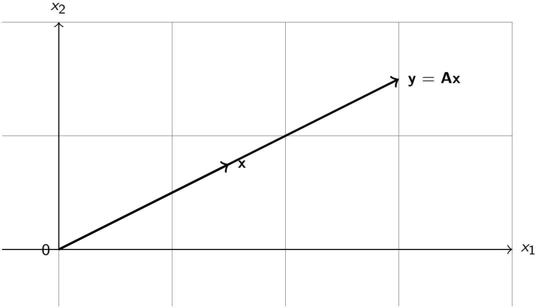
$\mathbf{A}$ sei eine 2-reihige Matrix.
Wir ordnen dann jedem Vektor $\mathbf{x}$ der Ebene durch die Abbildungsgleichung (*Transformationsgleichung*)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

in eindeutiger Weise einen *Bildvektor* $\mathbf{y}$ der Gleichen Ebene zu.
Wie in unserem einführenden Beispiel können wir wiederum den Vektor $\mathbf{x}$ als den *Ortsvektor* eines (ebenen) Punktes P auffassen, der bei dieser Transformation in den Ortsvektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ des zugeordneten *Bildpunktes* $P^{'}$ übergeführt wird.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Unsere *Problemstellung* lautet jetzt wie folgt: gibt es bestimmte Richtungen, die sich von den anderen Richtungen dadurch unterscheiden, daß der *Urbildvektor* $\mathbf{x}$ und der zugehörige *Bildvektor* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ in eine *gemeinsame* Linie (Gerade) fallen? Für eine solche bevozugte Richtung muß also gelten: fällt der Urbildvektor $\mathbf{x}$ in diese Richtung, so liegt auch der Bildvektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ in dieser Richtung.



Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die Richtung selbst ist dabei durch Angabe des in diese Richtung fallenden *Urbildvektors* $\mathbf{x}$ eindeutig festgelegt.
Für solche bevorzugten Richtungen muss also gelten, dass der *Bildvektor* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ein Vielfaches (λ-faches) des *Urbildvektors* $\mathbf{x}$ darstellt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Die (noch unbekannten) bevorzugten Richtungen bzw. die in diese Richtungen fallenden *Urbildvektoren* genügen somit der Matrizengleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Durch diese Gleichung wird das sog. *Matrixeigenwertproblem* beschrieben.
Die Matrix $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ ist die sog. *charakteristische Matrix* von $\mathbf{A}$.
In ausführlicher Schreibweise lautet die Matrizengleichung wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Nicht-triviale Lösungen, d.h. vom Nullvektor $\mathbf{0}$ *verschiedene* Lösungen treten jedoch nur dann auf, wenn die Koeffizientendeterminante des homogenen linearen Gleichungssystem *verschwindet*.
Dies führt zu der folgenden *charakteristischen Gleichung* mit dem unbekannten Parameter λ:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die 2-reihige Determinante $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ wird dabei als *charakteristisches Polynom* $p(\lambda)$ der Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet.
Die Lösungen der charakteristischen Gleichung heissen *Eigenwerte*, die zugehörigen (vom Nullvektor verschiedenen) Lösungsvektoren *Eigenvektoren* der Matrix $\mathbf{A}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die *Eigenwerte* der Matrix $\mathbf{A}$ werden aus der *charakteristischen Gleichung* berechnet, sind also die *Nullstellen des charakteristischen Polynoms* $p(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (\underbrace{a_{11} + a_{22}}_{\mathrm{Sp}(\mathbf{A})})\lambda + (\underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det \mathbf{A}}) = 0 \end{aligned}$$

Die *Koeffizienten* dieser quadratischen Gleichung haben dabei folgende Bedeutung:
der *erste* Koeffizient ist die mit einem Minuszeichen versehene sog. *Spur* der Matrix $\mathbf{A}$, definiert durch die Gleichung

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$$

(*Summe der Hauptdiagonalelemente*).
Der *zweite* Koeffizient ist die *Koeffizientendeterminante*

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Sind λ_1 und λ_2 die beiden *Eigenwerte*, d.h. die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung, so können wir das *charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Sp}(\mathbf{A}) \cdot \lambda + \det \mathbf{A}$$

auch in der *Produktform*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

darstellen (Zerlegung in *Linearfaktoren*).
Durch einen Vergleich der Koeffizienten in den beiden Gleichungen erhalten wir dann zwei wichtige Beziehungen zwischen der *Spur* and der *Determinante* von $\mathbf{A}$ einerseits und den beiden *Eigenwerten* λ_1 und λ_2 der Matrix $\mathbf{A}$ andererseits:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det \mathbf{A} &= \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Durch die Matrizengleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

wird ein *zweidimensionales Eigenwertproblem* beschrieben. Dabei bedeuten:

$\mathbf{A}$:	2-reihige (reelle order komplexe) Matrix
$\mathbf{E}$:	2-reihige *Einheitsmatrix*
λ :	*Eigenwert* der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{x}$:	*Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ
$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$:	*Charakteristische Matrix* von $\mathbf{A}$

Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der Matrix $\mathbf{A}$ lassen sich dann schrittweise wie folgt berechnen:

1. Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

   $$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

   (*quadratische* Gleichung mit den beiden Lösungen λ_1 und λ_2).

2. Der zum Eigenwert λ_i gehörige *Eigenvektor* $\mathbf{x}_i$ ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

   $$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

   Er wird üblicherweise in der *normierten* Form angegeben.

Eigenschaften der Eigenwerte

Eigenschaften der Eigenwerte

1. Die *Spur* der Matrix **A** ist gleich der *Summe* der beiden Eigenwerte:

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

2. Die *Determinante* von **A** ist gleich dem *Produkt* der beiden Eigenwerte:

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

Anmerkungen

- Sind die beiden Eigenwerte voreinander *verschieden*, so sind die zugehörigen Eigenvektoren *linear unabhängig*.
- Zu einem *doppelten* (*zweifachen*) Eigenwert gehören mindestens ein, höchstens aber zwei, *linear unabhängige* Eigenvektoren.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Beispiel

Wir berechnen die *Eigenwerte* der 2-reihigen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Sie sind die Lösungen der folgenden *charakteristischen Gleichung*:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(4-\lambda)+5 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte *lauten* demnach: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Der zum Eigenwert λ_1 gehörende *Eigenvektor* wird aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} + 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt.
In ausführlicher Schreibweise lautet dieses System wie folgt:

$$\begin{aligned} -\,x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem *reduziert* sich auf die *eine* Gleichung

$$x_1 + 5x_2 = 0.$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Eine bei der beiden Unbekannten ist somit *frei wählbar*.
Wir entscheiden uns für x_2 und setzen daher $x_2 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
Die vom reellen Parameter α abhängige Lösung lautet dann $x_1 = -5\alpha$, $x_2 = \alpha$.
Den Lösungsvektor (Eigenvektor)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wollen wir noch *normieren*:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Analog lässt sich der zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ gehörende *Eigenvektor* aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

bestimmen.
Dieses Gleichungssystem lautet in ausführlicher Schreibweise wie folgt:

$$\begin{aligned} -5x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es reduziert sich auf *eine* Gleichung

$$x_1 + x_2 = 0$$

die aber noch *zwei* unbekannte Grössen enthält.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Wir können daher *eine* der beiden Unbekannten *frei wählen* und entscheiden uns dabei für x_2, d.h. wir setzen $x_2 = \beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$).
Die vom reellen Parameter β abhängige Lösung ist dann $x_1 = -\beta$, $x_2 = \beta$.
Der gesuchte *Eigenvektor* lautet somit

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder (in der *normierten* Form)

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die *normierten* Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ der Matrix $\mathbf{A}$ sind dabei *linear unabhängig*, da sie zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Durch die Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

wird die *Drehung* eines ebenen x_1, x_2-Koordinatensystems um den Winkel ϕ um den Nullpunkt beschrieben.
Für welche Drehwinkel erhalten wir *reelle* Eigenwerte $(0^\circ < \phi < 360^\circ)$?

Lösung
Die *Eigenwerte* berechnen sich aus der *charakteristischen Gleichung*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} \cos(\phi) - \lambda & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\cos(\phi) - \lambda)(\cos(\phi) - \lambda) + \sin(\phi)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\cos(\phi) \cdot \lambda + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Sie lauten:

$$\lambda_{1/2} = \cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) - 1}$$

Reelle Werte sind demnach nur möglich , wenn die Bedingung

$$\cos^2(\phi) - 1 \geq 0 \quad \text{und damit} \quad \cos^2(\phi) \geq 1$$

erfüllt ist.
Andererseits gilt stets $\cos^2(\phi) \leq 1$.
Beide Bedingungen *zusammen(!)* führen dann auf die Gleichung

$$\cos^2(\phi) = 1$$

die im Intervall $0^\circ < \phi < 360^\circ$ genau *eine* Lösung besitzt, nämlich $\phi = 180^\circ$ oder (im Bogenmass) $\phi = \pi$.
Dieser Wert entspricht einer *Drehung* des Koordinatensystems um 180° im *Gegenuhrzeigersinn*.

Zum Winkel $\phi = \pi$ gehört der *doppelte* Eigenwert $\lambda_{1/2} = \cos(\pi) = -1$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die zugehörigen (linear unabhängigen) *Eigenvektoren* lassen sich dann aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} + 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen (in der Matrix $\mathbf{A}$ wurde $\phi = \pi$ gesetzt).
Dieses Gleichungssystem lautet in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

und reduziert sich auf die *eine* Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die Unbekannten x_1 und x_2 sind somit beide *frei wählbar*.
Wir setzen daher $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
Damit erhalten wir von zwei Parametern abhängigen Lösungsvektor (Eigenvektor)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

und daraus für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ die beiden *linear unabhängigen* (und bereits normierten) *Eigenvektoren*

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der *allgemeine* Lösungsvektor **x** ist dann als *Linearkombination* dieser (orthonormierten) Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ darstellbar:

$$\mathbf{x} = \alpha\tilde{\mathbf{x}}_1 + \beta\tilde{\mathbf{x}}_2 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Er beschreibt den *Ortsvektor* des Punktes $P = (\alpha; \beta)$ und geht bei der Drehung um 180° in den *Gegenvektor*

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = -\mathbf{x}$$

über.

Der *zweifache Eigenwert* $\lambda_{1/2} = -1$ bewirkt also lediglich eine *Richtungsumkehr* des Ortsvektor **x** (*Punktspiegelung* am Koordinatenursprung, der Nullpunkt selbst muss wiederum *ausgenommen* werden).

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Analoge Betrachtungen führen bei einer *n-reihigen* Matrix **A** auf das *n-dimensionale Eigenwertproblem*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad (A - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Die Lösung dieser Aufgabe, d.h. die Bestimmung der *Eigenwerte* und der zugehörigen *Eigenvektoren*, erfolgt dann ähnlich wie bei einer 2-reihigen Matrix.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Durch die Matrizengleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

wird ein *n-dimensionales Eigenwertproblem* beschrieben. Dabei bedeuten:

$\mathbf{A}$:	n-reihige (reelle order komplexe) Matrix
$\mathbf{E}$:	n-reihige *Einheitsmatrix*
λ :	*Eigenwert* der Matrix **A**
$\mathbf{x}$:	*Eigenvektor* der Matrix **A** zum Eigenwert λ
$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:	*Charakteristische Matrix* von **A**

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der Matrix **A** lassen sich dann schrittweise wie folgt berechnen:

1. Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

   $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

   (*algebraische* Gleichung der Ordnung n mit den Lösungen λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

2. Der zum Eigenwert λ_i gehörige *Eigenvektor* $\mathbf{x}_i$ ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

   $$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

   Er wird üblicherweise in der *normierten* Form angegeben.
   Bei einem *mehrfachen* Eigenwert können auch *mehrere* Eigenvektoren auftreten, siehe weiter unten.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer *n*-reihigen Matrix

Eigenschaften der Eigenwerte

1. Die *Spur* der Matrix **A** ist gleich der *Summe* aller Eigenwerte:

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

2. Die *Determinante* von **A** ist gleich dem *Produkt* aller Eigenwerte:

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

3. Sind *alle* Eigenwerte voneinander *verschieden*, so gehört zu jedem Eigenwert genau *ein* linear unabhängiger Eigenvektor, der bis auf einen (beliebigen) *konstanten* Faktor eindeutig bestimmt ist. Die n Eigenvektoren werden üblich *normiert* und sind *linear unabhängig*.
4. Tritt ein Eigenwert dagegen *k-fach* auf, so gehören hierzu *mindestens ein*, *höchstens* aber k linear unabhängige Eigenvektoren.
5. Die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer *linear unabhängig*.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Anmerkungen

- Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind die *Nullstellen* des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$.
- Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann *regulär*, wenn *sämtliche* Eigenwerte von Null *verschieden* sind.
- Ist λ_i ein Eigenwert der *regulären* Matrix $\mathbf{A}$, so ist der Kehrwert $1/\lambda_i$ ein Eigenwert der *inversen* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.
- Beim Auftreten *mehrfacher* Eigenwerte kann also die *Gesamtzahl* linear unabhängiger Eigenvektoren *kleiner* sein als n.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Beispiel

Welche *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* besitzt die 3-reihige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \ ?$$

Lösung:

Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sie lauten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

Wir bestimmen jetzt die zugehörigen *Eigenvektoren*.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$
Der *Eigenvektor* genügt dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\mathbf{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+3x_2} &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Dabei ist $\alpha \neq 0$ eine willkürliche Konstante (da x_3 in den Gleichungen *nicht* auftritt, können wir über diese Unbekannte *frei verfügen* und setzen daher $x_3 = \alpha$).
Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ gehörende *Eigenvektor* lautet somit:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

Er ist bis auf den *konstanten* Faktor $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt.
Durch *Normierung* erhalten wir schliesslich den gesuchten *Eigenvektor*

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Eigenvektor zu λ_2=1

Das homogene lineare Gleichungssystem lautet jetzt:

$$(\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 0 \\ -3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Da dieses System *drei* Unbekannte, aber *nur* zwei Gleichungen besitzt, kann *eine* der unbekannten Grössen *frei gewählt* werden.

Wir entscheiden uns für die Unbekannte x_2 und setzen $x_2 = \beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

Das Gleichungssystem wird dann gelöst durch $x_1 = 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = -3\beta$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Damit lautet der zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ gehörende *Eigenvektor* wie folgt:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ -3\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \beta \neq 0$$

Er ist bis auf den *konstanten* Faktor $\beta \neq 0$ eindeutig bestimmt.
Durch *Normierung* folgt schliesslich:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \beta \neq 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Eigenvektor zu λ_3=3

Diesmal erhalten wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} -\ 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -\ \ x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -\ 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $x_1 = 0$, $x_2 = -\gamma$, $x_3 = \gamma$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Dabei ist $\gamma \neq 0$ eine *willkürliche* Konstante.
Der zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$ gehörende *Eigenvektor* ist damit bis auf den *konstanten* Faktor $\gamma \neq 0$ eindeutig bestimmt.
Er lautet:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder in der üblichen *normierten* Form:

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

Die drei Eigenvektoren sind - wie erwartet - *linear unabhängig*, da die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

regulär ist.