Prof. Dr. E. W. Farkas
ETH Zürich FS 2015

Koordinator
Wei Qian

Mathematatik II BIOL-B, HST, PHAR

Serie 3

Abgabe: 17/18.03.2015, während der Übungsstunde, oder vor Beginn der Übung am selben Tag im Fach des jeweiligen Assistenten.
Die Fächer befinden sich im Vorraum des Büros HG E 66.1.

Aufgabe 1
Zu $m \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Matrix

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1-m \\ 1-m & 1-m & 0 \\ 1 & 1-2m & 0 \end{pmatrix}$$

und den Vektor $b(m) = (m, 1, 1)^T$.

1. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m die Determinante sowie den Rang von $A(m)$. Wann besitzt $A(m)$ maximalen Rang?
2. Berechen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel in den Fällen, in denen $A(m)$ maximalen Rang aufweist, die Lösung des linearen Gleichungssystems $A(m)x = b(m)$.
3. In den Fällen, wo $A(m)$ nicht maximalen Rang hat, entscheide man, ob das Gleichungssystem $A(m)x = b(m)$ eine Lösung besitzt. Falls dies zutrifft, so finde man alle Lösungen.

Aufgabe 2
Zu folgenden Matrizen berechne man die Eigenwerte und Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sowie die zugehörige Eigenvektoren v_1, v_2.
2. Wir definieren $T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. die Spalten der Matrix T sind die Vektoren v_1 und v_2. Berechnen Sie T^{-1} und $D = T^{-1}AT$. Was stellen Sie fest?
3. Berechnen Sie A^{99}.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die Eigenvektoren zum reellen EW z_1.
2. Seien z_2 und z_3 die komplexen EW. Geben Sie z_2 und z_3 in kartesischer und Polardarstellung an.
3. Zeichnen Sie folgende Zahlen in die komplexe Ebene:
   - die konjugierten komplexen Zahlen von z_2 und z_3.
   - z_2, z_2^2, z_2^3 und z_3, z_3^2, z_3^3 und sämtliche Produkte.
4. Sei v_0 ein EV zum EW z_2 und $\widetilde{v_0}$ ein EV zum EW z_3. Zeigen Sie, dass $A^3 v_0 = v_0$ und $A^3 \widetilde{v_0} = \widetilde{v_0}$ gilt – Sie müssen dafür nicht die EV berechnen.
5. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^3, w \neq 0$ gilt: $A^3 \cdot w = w$.

   Hinweis: Mit 3 linear unabhängigen Vektoren im $\mathbb{C}^3$ können wir jeden Vektor $w \in \mathbb{C}^3$ (also auch jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$) als eindeutige Linearkombination schreiben.

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Vorlesungshomepage unter
`https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/other/mathematik2_biol`
Dort finden Sie weitere Informationen zur Vorlesung, und unter "Übungen" auch den üblichen Übungsablauf, die Serien samt Lösungen im PDF-Format sowie die Raumzuteiligung der einzelnen Gruppen.