

Mathematik II
Frühlingsemester 2015
Kapitel 8: Lineare Algebra
8.3 Ergänzungen

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/other/mathematik2_biol

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
<http://www.math.ethz.ch/~farkas>

Definition einer regulären Matrix

Definition

Eine n -reihige, quadratische Matrix \mathbf{A} heißt regulär, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Andernfalls heißt sie *singulär*.

Anmerkungen

- \mathbf{A} ist *regulär*, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist, und *singulär*, wenn $\det \mathbf{A} = 0$ ist.
- Man beachte: Die Begriffe "Reguläre Matrix" und "Singuläre Matrix" sind **nur** für *quadratische* Matrizen definiert.

Beispiel

- Die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist *regulär*, da ihre

Determinante einen von Null *verschiedenen* Wert besitzt:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

Inverse Matrix

Definition

Gibt es zu einer n -reihigen, quadratischen Matrix \mathbf{A} eine Matrix \mathbf{X} mit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

so heisst \mathbf{X} die zu \mathbf{A} *inverse Matrix* und wird durch das Symbol \mathbf{A}^{-1} gekennzeichnet.

Anmerkungen

- Eine *quadratische* Matrix besitzt - wenn überhaupt - *genau eine* Inverse.
- Besitzt eine Matrix \mathbf{A} eine *inverse* Matrix \mathbf{A}^{-1} , so heisst \mathbf{A} *invertierbar* (*umkehrbar*). Die Matrix \mathbf{A}^{-1} wird auch als *Kehrmatrix*, *Umkehrmatrix*, oder *Inverse* von \mathbf{A} bezeichnet. Sie ist wie \mathbf{A} n -reihig.
- Die Inverse \mathbf{A}^{-1} einer Matrix \mathbf{A} existiert nur wenn \mathbf{A} is regulär, d.h. wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist. Diese Bedingung ist *notwendig und hinreichend*.

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Zu jeder *regulären* n -reihigen Matrix \mathbf{A} gibt es genau eine *inverse* Matrix \mathbf{A}^{-1} mit

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Dabei bedeuten:

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$: *Algebraisches Komplement* von a_{ik} in $\det \mathbf{A}$
 D_{ik} : $(n-1)$ -reihige *Unterdeterminante* von $\det \mathbf{A}$
 (in $\det \mathbf{A}$ wird die i -te Zeile und k -te Spalte gestrichen)

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Anmerkungen

- Man beachte die *Reihenfolge* der Indizes. In der i -ten Zeile und k -ten Spalte von \mathbf{A}^{-1} befindet sich das algebraische Komplement A_{ki} und *nicht* etwa A_{ik} .
- Häufig führt man die zu \mathbf{A} *adjungierte* Matrix ein:

$$\mathbf{A}_{adj} = (A_{ik})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Die *inverse* Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnet sich dann aus \mathbf{A}_{adj} wie folgt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_{adj}$$

Berechnung der inversen Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Beispiel

- Die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist wegen $\det \mathbf{A} \neq 0$ *regulär*

und daher *invertierbar*.

Die zu \mathbf{A} *inverse* Matrix \mathbf{A}^{-1} lautet somit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Orthogonale Matrix

Definition

Eine n -reihige, quadratische Matrix \mathbf{A} heißt *orthogonal*, wenn das Matrizenprodukt aus \mathbf{A} und ihrer Transponierten \mathbf{A}^T die Einheitsmatrix \mathbf{E} ergibt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$$

Anmerkungen

- $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}^T = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$

Diese Beziehung bedeutet, dass die *Zeilenvektoren* einer orthogonalen Matrix \mathbf{A} *normiert* sind, also *Einheitsvektoren* darstellen und zueinander *orthogonal* sind.

Ein Vektorsystem mit diesen Eigenschaften wird als *orthonormiert* bezeichnet.

- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{E} = 1$
- $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix

- Die *Zeilen* bzw. *Spaltenvektoren* einer *orthogonalen* Matrix \mathbf{A} bilden ein *orthonormiertes* System, stellen also zueinander *orthogonale Einheitsvektoren* dar.
Dieser Eigenschaft verdanken die orthogonalen Matrizen auch ihren Namen.
- Die *Determinante* einer orthogonalen Matrix \mathbf{A} besitzt den Wert $+1$ oder -1 :

$$\det \mathbf{A} = +1 \quad \text{oder} \quad \det \mathbf{A} = -1$$

- Bei einer orthogonalen Matrix \mathbf{A} sind die Transponierte \mathbf{A}^T und die Inverse \mathbf{A}^{-1} *identisch*:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

- Das *Produkt* orthogonaler Matrizen ist wiederum eine *orthogonale* Matrix.

Eigenschaften einer orthogonalen Matrix

Beispiele

- Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist zwar *regulär*, sie ist jedoch *nicht* orthogonal: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- Die Transformationsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

ist orthogonal, denn es gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 & 0 \\ 0 & \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Rang einer Matrix

Definition

Werden in einer Matrix \mathbf{A} vom Typ (m, n) genau $m - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten gestrichen, so heisst die Determinante der p -reihigen Restmatrix eine *Unterdeterminante p -ter Ordnung* von \mathbf{A} .

Anmerkungen

- Eine *Unterdeterminante p -ter Ordnung*, wird auch als *p -reihige Unterdeterminante* bezeichnet.
- Ist \mathbf{A} eine *n -reihige*, quadratische Matrix, so sind $n - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten zu streichen, um eine *p -reihige* Unterdeterminante von \mathbf{A} zu erhalten.

Rang einer Matrix

Beispiel



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix vom Typ $(3, 4)$. Wir erhalten beispielsweise die folgende 3-reihige Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -95$$

Rang einer Matrix

Definition

Unter dem *Rang* einer Matrix \mathbf{A} vom Typ (m, n) wird die *höchste* Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von \mathbf{A} verstanden.
Symbolische Schreibweise:

$$\text{Rg}(\mathbf{A}) = r$$

Anmerkungen

- Der Rang r ist höchstens gleich der *kleineren* der beiden Zahlen m und n .
- Für eine n -reihige, quadratische Matrix \mathbf{A} ist stets $r \leq n$.
Insbesondere gilt für eine reguläre bzw. singuläre Matrix:

Reguläre Matrix \mathbf{A} : $\det \mathbf{A} \neq 0$, d.h. $r = n$

Singuläre Matrix \mathbf{A} : $\det \mathbf{A} = 0$, d.h. $r < n$

- Für die n -reihige *Nullmatrix* $\mathbf{0}$ wird festgesetzt: $\text{Rg}(\mathbf{0}) = 0$.

Rangbestimmung einer Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Rangbestimmung einer Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Der Rang r einer (m, n) -Matrix \mathbf{A} kann wie folgt bestimmt werden (für $m \leq n$):

- 1 Zunächst werden die m -reihigen Unterdeterminanten von \mathbf{A} berechnet. Es gilt $r = m$, wenn es unter ihnen wenigstens *eine* von Null verschiedene Determinante gibt.
- 2 Verschwinden aber *sämtliche* m -reihigen, so ist r *höchstens gleich* $m - 1$. Es ist daher zu prüfen, ob es wenigstens *eine* von Null verschiedene $(m - 1)$ -reihige Unterdeterminante von \mathbf{A} gibt. Ist dies der Fall, so ist $r = m - 1$. Anderfalls ist r *höchstens gleich* $m - 2$. Das beschriebene Verfahren wird dann solange fortgesetzt, bis man auf eine von Null *verschiedene* Unterdeterminante von \mathbf{A} stößt. Die *Ordnung* r dieser Determinante ist dann der gesuchte *Rang* der Matrix \mathbf{A} .

Elementare Umformungen einer Matrix

Elementare Umformungen einer Matrix

Der *Rang* r einer Matrix \mathbf{A} ändert sich *nicht*, wenn sie den folgenden *elementaren Umformungen* unterworfen wird:

- 1 Zwei Zeilen (oder Spalten) werden miteinander *vertauscht*.
- 2 Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert*.
- 3 Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges *Vielfaches* einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert.

Rangbestimmung einer Matrix mit Hilfe elementarer Umformungen

Der Rang $\text{Rg}(\mathbf{A})$ einer (m, n) -Matrix \mathbf{A} kann auch wie folgt bestimmt werden. Die Matrix wird zunächst mit Hilfe *elementarer Umformungen* auf die folgende sog. *Trapezform* gebracht:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

($b_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, r$).

Der Rang von \mathbf{A} ist dann gleich der Anzahl r der *nicht-verschwindenden* Zeilen: $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r$.

Beispiel

Wir bestimmen den *Rang* der $(3, 4)$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

indem wir die Matrix \mathbf{A} der Reihe nach, den folgenden *elementaren Umformungen* unterwerfen (die jeweils durchgeführte Umformung wird an die betreffende Zeile geschrieben; Z: Zeile):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2Z_1 \\ +Z_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -3Z_2 \end{array} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{"Nullzeile"} \end{aligned}$$

Die Matrix hat jetzt die gewünschte *Trapezform*.

Ihr *Rang* beträgt somit $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$.