Prof. Dr. E. W. Farkas
ETH Zürich FS 2015

Koordinator
Wei Qian

Mathematik II BIOL-B, HST, PHAR

Lösung 1

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & \frac{9}{5} \\ 2 & 1 & 3\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ -Z_1 \end{matrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & \frac{9}{5} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{18}{5} \\ 0 & 1 & 2-\lambda & \lambda - \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\frac{1}{3}Z_2 \end{matrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & \frac{9}{5} \\ 0 & -3 & \lambda & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 2-\frac{2}{3}\lambda & \lambda - 3 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda \neq 3$ gilt, dann ist der Rang der Matrix A gleich 3. Falls $\lambda = 3$ gilt, dann ist der Rang gleich 2.

Aufgabe 2

1. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \lambda(2(\lambda-1) + 2\cdot 3) + 1\cdot(0\cdot 3 - 1\cdot(\lambda - 1)) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

   Es folgt

$$\det(A) = 0 \quad \iff \quad \lambda = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

2. (i) Die lineare Gleichung $Ax = 0$ ist genau dann nur trivial lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist.

   (ii) Die lineare Gleichung $Ax = 0$ besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $\lambda \in \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist. Anwendung des Gauß-Verfahrens liefert nämlich im Falle $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z, \\ y = -z, \end{cases}$$

   und im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z, \\ y = -\frac{4}{3}z. \end{cases}$$

3. Dies ist der Fall genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ gilt.
4. Unabhängig von λ ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

stets eine Lösung von $Ax = b$. Im Falle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ sind dies bereits alle Lösungen. Im Falle $\lambda = -1$ ist (vgl. (b)) jede Lösung x von der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t-1 \end{pmatrix},$$

im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$ ist sie (vgl. (b)) von der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ -4t \\ 3t-1 \end{pmatrix},$$

jeweils für ein $t \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3

Die fraglichen Gleichungssysteme besitzen genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der gegebenen Matrix verschwindet.

1. Hier gilt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2 - 1 = 0$$

genau dann, wenn $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} i$ oder $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} i$.

2. Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$$

genau dann, wenn $\lambda = \pm 2$ oder $\lambda = \pm i$.