Prof. Dr. E. W. Farkas
ETH Zürich FS 2015

Koordinator
Wei Qian

Mathematik II BIOL-B, HST, PHAR

Lösung 2

Aufgabe 1
Wir bezeichnen die in den einzelnen Aufgaben gegebenen Vektoren mit (in dieser Reihenfolge) v_1, v_2, v_3. Es ist jeweils zu entscheiden, ob die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt.

1. Hier folgt $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_3$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, also insgesamt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Damit sind die Vektoren v_i, $i = 1 \dots 3$, linear unabhängig.

2. Mit $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, d.h. die Vektoren v_i, $i = 1 \dots 3$, sind linear abhängig.

3. Aus der dritten Zeile folgt $\lambda_1 = 0$, dann aus der zweiten Zeile $\lambda_2 = 0$ und schliesslich $\lambda_3 = 0$. Somit sind die Vektoren linear unabhängig.

4. Mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1 - i$ gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ und damit lineare Abhängigkeit.

Aufgabe 2
Wir geben jeweils nur die bei der Durchführung des Gauß-Verfahren auftretenden Zwischenschritte und das Endergebnis an.

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & -21 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -6 & 9 & -21 \\ 0 & 13 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -3, \\ z = 0. \end{cases}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}z, \\ y = -\frac{1}{2}z, \\ z \text{ beliebig.} \end{cases}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}w, \\ y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}w, \\ z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}w, \\ w \text{ beliebig.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

1. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert
$$\det A = 8 + \lambda.$$
Es folgt
$$\det A = 0 \iff \lambda = -8,$$
A ist regulär für $\lambda \neq -8$.

2. Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens liefert
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+8 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$
$$\text{wann} \overset{\lambda\neq-8}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+8} & -\frac{2}{\lambda+8} & \frac{4}{\lambda+8} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{\lambda+8} & \frac{4}{\lambda+8} & \frac{\lambda}{\lambda+8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+8} & -\frac{2}{\lambda+8} & \frac{4}{\lambda+8} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{\lambda+8} & \frac{\lambda}{\lambda+8} & -\frac{2\lambda}{\lambda+8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{\lambda+8} & \frac{4}{\lambda+8} & \frac{\lambda}{\lambda+8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+8} & -\frac{2}{\lambda+8} & \frac{4}{\lambda+8} \end{array}\right)$$
Es folgt
$$A(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda+8} \begin{pmatrix} 4 & \lambda & -2\lambda \\ -2 & 4 & \lambda \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$