Lösungen 7

27. Wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt durch zwei Vektoren v und w, dann sind ihre beiden normalen Einheitsvektoren gegeben durch $n := \frac{v\times w}{||v\times w||}$ und $-n$. Die assoziierten Spannungsvektoren unterscheiden sich um ein Vorzeichen, i.e. $\sigma(-n) = -\sigma(n)$. In unserem Fall setzen wir

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und bekommen $n := \frac{v\times w}{||v\times w||} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\sigma(n) = n^t\sigma = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma(-n) = \frac{-1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

(Siehe beispielsweise die Formel vor Remark 6.7 im Skript.)

28. Wegen der Linearität der Matrixmultiplikation hängt die Lösung nicht von s ab. Wir nehmen deshalb $s = 1$ an. Bezeichne φ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung σ bezüglich der Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3. Gesucht ist nun eine Basis $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit

$$\varphi(v_1) = 0, \varphi(v_2) = v_3, \varphi(v_3) = v_2.$$

Wir sehen, dass φ die erzeugten Untervektorräume $\langle e_1\rangle, \langle v_1\rangle, \langle e_2, e_3\rangle, \langle v_2, v_3\rangle$ jeweils auf sich selbst abbildet. Daher können wir β finden mit $v_1 \in \langle e_1\rangle$ und $v_2, v_3 \in \langle e_2, e_3\rangle$. Wir setzen $v_1 := e_1$. Für die anderen beiden Vektoren machen wir den Ansatz $v_2 = ae_2+be_3, v_3 = ce_2+de_3$ und bekommen das Gleichungssystem

$$-ae_2 + be_3 = a\varphi(e_2) + b\varphi(e_3) = \varphi(v_2) = v_3 = ce_2 + de_3,$$

$$-ce_2 + de_3 = c\varphi(e_2) + d\varphi(e_3) = \varphi(v_3) = v_2 = ae_2 + be_3.$$

Eine Lösung dafür ist beispielsweise $a = b = d = 1, c = -1$. Also hat die Basis $\{e_1, e_2+e_3, -e_2+e_3\}$ die gewünschten Eigenschaften.
Die Transformation von der Standardbasis zu dieser Basis ist gerade Drehung um 45 Grad um die e_1-Achse.

29. Da L orthonormal ist, gilt $L^{-1} = L^t$. Der transformierte Tensor ist also

$$L^t\sigma L = L^t \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich sind die Spaltenvektoren von L sogar Eigenvektoren von σ zu den Eigenwerten die auf der Diagonale des transformierten Tensors stehen.

Bitte wenden!

30. Zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 beziehungsweise λ_3 kriegen wir die normierten Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{beziehungsweise} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

31. **a)** Das Trägheitsmoment von Θ bezüglich der Achse $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})\Theta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{23}{3}.$$

(Siehe beispielsweise Abschnitt 6.1.2 des Skripts.)

b) Die Symmetrieachsen des Ellipsoids sind gegeben durch die Vektoren einer Eigenbasis von Θ, welche zugleich eine Orthonormalbasis ist (siehe beispielsweise Abschnitt 6.1.3 im Skript). Zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 beziehungsweise λ_3 finden wir die normierten Eigenvektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{beziehungsweise} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da dies Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind, stehen sie bereits orthogonal zueinander.