Orbital Dynamics - Lösung

Lösung 1

(a) Apogäumsdistanz $r_a = a(1+e)$ und Perigäumsdistanz $r_p = a(1-e)$. Es folgt

$$r_a = \frac{1+e}{1-e} r_p = 11500\,\mathrm{km}$$

(b)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{1}{2}(r_a + r_p) \right)^{\frac{3}{2}} = 8782\,\mathrm{s}$$

(c)

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p) = 9200\,\mathrm{km}$$

Lösung 2

(a)

$$v_\perp = \frac{h}{p}(1 + e\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1 + e\cos\vartheta}{\sqrt{1 - e^2}}$$

(b) Satellit A:

$$\dot{\vartheta} = \frac{v_\perp}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{(1 + e\cos\vartheta)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Satellit B:

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Gleichsetzen liefert

$$\vartheta_0 = \arccos\left(\frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{4}} - 1}{e}\right)$$

(c) Wahre Anomalie:

$$\vartheta_0 = 103.16^\circ$$

Exzentrische Anomalie: $\tan\left(\frac{E_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)$

$$\Rightarrow E_0 = 85.545^\circ = 1.49305$$

Mittlere Anomalie:

$$M_0 = E_0 - e\sin E_0 = 1.194$$

mittels $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{3}{2}} = 9952.02\,\mathrm{s}$ errechnet man

$$t_A = \frac{M_0}{2\pi}T = 1891\,\mathrm{s}$$
$$t_B = \frac{\vartheta_0}{2\pi}T = 2852\,\mathrm{s}$$

Lösung 3

(a)

$$v(t) = c \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right) - gt$$

$$\Rightarrow \qquad v\left(\frac{T}{2}\right) = 7.140 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v(T) = 23.537 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(b)

$$h(t) \approx 13.9\,\mathrm{m}$$

Lösung 4

(a)

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\sqrt{\frac{2}{1+e_1} - \frac{2}{2+e_1-e_2}} - \sqrt{\frac{2}{1+e_1} - 1} \right) = 0.066096... \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$
$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\sqrt{\frac{2}{1-e_2} - \frac{2}{2+e_1-e_2}} - \sqrt{\frac{2}{1-e_2} - 1} \right) = 0.036568... \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$
$$\Delta v = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 0.10266... \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

(b)

$$\frac{1}{2} T_{\text{Übergang}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{\text{Übergang}}}{a} \right)^{\frac{3}{2}} T = \frac{1}{2} \left(\frac{a(2+e_1-e_2)}{2a} \right)^{\frac{3}{2}} T = 2.3074...\text{h}$$

Lösung 5

Notation: $v^{(S)}$ bzw. $v^{(M)}$ sind Geschwindigkeitsbeträge im (momentanen) Ruhesystem von Sonne bzw. Mars. Wir verwenden Δv nur für Grössen, die einem Antriebsbedarf entsprechen.
Aus den Bedingungen für den *Hohmannübergang*:

$$v_\infty^{(M)} = v_M^{(S)} \left(\sqrt{2 - \frac{2}{1 + r_E/r_M}} - 1 \right).$$

Mit Hilfe der Tabelle: $r_E/r_M = 0.656297$, $v_M^{(S)} = 24.1382\,\mathrm{km/s}$, $v_\infty^{(M)} = 2.6492\,\mathrm{km/s}$.
Startphase (Bezugssystem Mars). Sei e_H die Exzentrizität der (Flucht-)Hyperbel, dann muss gelten

$$\delta/2 = \vartheta_\infty - \pi/2, \qquad \cos\vartheta_\infty = -\frac{1}{e_H}, \qquad \vartheta_\infty \in (\pi/2, \pi).$$

Dabei ist $e_H = 1 + v_\infty^2 r_{p,H}/\mu_M$, vgl. Lösung zu 37.a
Aus $r_{p,H} = r_K$ (K=Kreis) folgt eine Gleichung für den Antriebsbedarf Δv von der Kreisbahn auf die Hyperbelbahn:

$$v_\infty^2 = (v_K + \Delta v)^2 - \frac{2\mu_M}{r_K}.$$

Wir erhalten mit $r_K = 3743.16\,\mathrm{km}$, und dem Wert $\mu_M = 42809.64\,\mathrm{km^3/s^2}$ (Tabelle): $e_H = 1.614$, $\delta/2 = 0.6684 = 38.3°$, $\Delta v = 2.086\,\mathrm{km/s}$.