Musterlösung 15

Körpererweiterungen, Körpererweiterungsgrade

1. Gegeben seien ein Körper K, eine nichtleere Indexmenge I und für jedes $i \in I$ ein Unterkörper $K_i \subset K$. Zeige: $\bigcap_{i\in I} K_i$ ist ein Unterkörper von K.

   Lösung: Setze $K' := \bigcap_{i\in I} K_i$. Für alle $i \in I$ gilt $1 \in K_i$, also $1 \in K'$. Betrachte beliebige Elemente $a, b, c \in K'$ mit $c \neq 0$. Für jedes $i \in I$ gilt dann $a, b, c \in K_i$, und da K_i ein Unterkörper ist, liegen $a + b$, ab, $-a$, c^{-1} alle in K_i. Da i beliebig ist, liegen diese Elemente in K'. Damit ist K' ein Unterkörper von K.

2. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung L/K. Zeige: Sind $[K_1/K]$ und $[K_2/K]$ teilerfremd, dann sind K_1 und K_2 linear disjunkt über K.

   Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass $[K_1K_2/K] \leqslant [K_1/K][K_2/K]$ ist. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Ungleichung.

   Wegen $[K_1K_2/K] = [K_1K_2/K_2] \cdot [K_2/K]$ ist $[K_2/K]$ ein Teiler von $[K_1K_2/K]$. Analog ist $[K_1/K]$ ein Teiler von $[K_1K_2/K]$. Aus der Teilerfremdheit erhalten wir, dass $[K_1/K] \cdot [K_2/K]$ den Grad $[K_1K_2/K]$ teilt, und deshalb gilt $[K_1K_2/K] \geqslant [K_1/K] \cdot [K_2/K]$.

3. Zeige: Für jede Körpererweiterung L/K sind äquivalent:

   (a) $[L/K] = 2$.

   (b) Es existiert $a \in L \smallsetminus K$ mit $L = K(a)$ sowie $a^2 \in K$ oder $a^2 + a \in K$.

   Lösung: (a)⇒(b): Wegen $[L/K] = \dim_K(L) = 2$ existiert ein Element $b \in L \smallsetminus K$. Dieses ist dann linear unabhängig von $1 \in K$. Somit bilden 1 und b eine Basis von L über K. Daher existieren $\alpha, \beta \in K$ mit $b^2 = \alpha b + \beta$.

   Im Fall $\alpha = 0$ ist $b^2 = \beta \in K$.

   Im Fall $\alpha \neq 0$ lässt sich $b^2 = \alpha b + \beta$ umformen zu $\frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{b}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha^2}$. Mit $a := -\frac{b}{\alpha}$ gilt dann $a^2 + a \in K$. Da $\frac{a}{b} \in K^\times$ ist, folgt $K(a) = K(b) = L$.

   (b)⇒(a): Wegen $a \notin K$ sind 1 und a linear unabhängig über K. Daher ist $R := K \oplus Ka \subset L$ ein K-Untervektorraum der Dimension 2. Für alle $a_1 = \alpha_1 + \beta_1 a$ und $a_2 = \alpha_2 + \beta_2 a$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ gilt

   $$a_1a_2 = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2a^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)a & \in K \oplus Ka \text{ falls } a^2 \in K \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2(a^2 + a) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \beta_1\beta_2)a & \in K \oplus Ka \text{ falls } a^2 + a \in K. \end{cases}$$

   Somit ist R ein Unterring von L mit $K \subset R$. Da er endliche Dimension über K hat, ist er ein Zwischenkörper. Also ist $R = K[a] = K(a) = L$ und es folgt $[L/K] = \dim_K(R) = 2$.

4. (a) Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}] = 4$.
   (b) Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Lösung: (a) Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und der vorigen Aufgabe ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}] = 2$. Weiter behaupten wir $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Daraus folgt dann wieder mit der vorigen Aufgabe

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2,$$

und mit der Multiplikativität der Körpergrade daher

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Für die Behauptung $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nehmen wir an, es sei $\sqrt{3} = \alpha + \beta\sqrt{2}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Wegen $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ gilt $\beta \neq 0$. Wir quadrieren und erhalten $3 = \alpha^2 + 2\beta\sqrt{2} + \beta^2 2$, was ein Widerspruch ist zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(b) Wir müssen zeigen, dass $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ist. Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

ist $\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ und daher auch $\sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Nach Definition des erzeugten Zwischenkörpers folgt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und somit Gleichheit.

Aliter: Wegen $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Wegen $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ ist dabei $[\mathbb{Q}(\sqrt{6})/\mathbb{Q}] \geqslant 2$. Weiter gilt $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{6})$, da andernfalls für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \alpha\sqrt{6} + \beta \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} - \beta}{\alpha\sqrt{2} - 1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

was wir in Teil (a) bereits ausgeschlossen haben. Also gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{6})] \geqslant 2$. Aus der Multiplikativität der Körpergrade folgt

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{6})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{6})/\mathbb{Q}] \geqslant 2 \cdot 2 = 4.$$

Wegen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ gilt andererseits

$$4 = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}].$$

Somit muss der erste Faktor auf der rechten Seite gleich 1 sein, woraus die gesuchte Gleichheit folgt.

**5. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K. Gilt die Ungleichung $[K_1K_2/K_2] \leqslant [K_1/K]$ allgemein im Sinne von Kardinalzahlen?