# Musterlösung 18

## Transzendente Erweiterungen und Körperhomomorphismen

1. Seien $L/K$ und $M/L$ Körpererweiterungen. Zeige, dass

$$\operatorname{trdeg}(M/K) = \operatorname{trdeg}(M/L) + \operatorname{trdeg}(L/K)$$

ist.

*Lösung*: Seien $S$ und $T$ Transzendenzbasen von $L/K$, beziehungsweise $M/L$. Wir zeigen, dass $S \cup T$ eine Transzendenzbasis von $M/K$ ist:

Die Erweiterungen $L/K(S)$ und $M/L(T)$ sind algebraisch, da $S$, beziehungsweise $T$, Transzendenzbasen von $L/K$, beziehungsweise $M/L$, sind. Elemente von $L(T)$ sind rationale Funktionen in den Variablen aus $T$ mit Koeffizienten in $L$. Da $L/K(S)$ algebraisch ist und wegen $T \subset K(S \cup T)$ ist somit $L(T)/K(S \cup T)$ algebraisch. Also ist $M/K(S \cup T)$ algebraisch, da $M/L(S)$ und $L(S)/K(S \cup T)$ algebraisch sind.

Die Menge $S \cup T$ ist zudem algebraisch unabhängig über $K$, denn wäre $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von 0 verschiedenes Polynom mit $f(s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_\ell) = 0$ für $s_1, \ldots, s_k \in S$ und $t_1, \ldots, t_\ell \in T$, so wäre

$$g(X_1, \ldots, X_\ell) := f(s_1, \ldots, s_k, X_1, \ldots, X_\ell) \in K(S)[X_1, \ldots, X_\ell] \subset L[X_1, \ldots, X_\ell]$$

ein von 0 verschiedenes Polynom, da $S$ algebraisch unabhängig über $K$ ist, und nach Konstruktion wäre $g(t_1, \ldots, t_\ell) = 0$, im Widerspruch zur Annahme, dass $T$ algebraisch unabhängig über $L$ ist.

2. Zeige: Eine Körpererweiterung $L/K$ ist genau dann rein transzendent, wenn $L$ isomorph über $K$ zum Quotientenkörper eines Polynomrings über $K$ ist.

*Bemerkung: Isomorph über $K$* bedeutet, dass ein Isomorphismus existiert, der auf $K$ die Identität ist.

*Lösung*: Wir zeigen zuerst, dass der Quotientenkörper eines beliebigen Polynomrings rein transzendent ist. Sei also $K((X_\nu)_{\nu \in N})$ ein solcher Quotientenkörper. Wir müssen zeigen, dass kein nichtverschwindendes Polynom $f \in K[(X_\nu)_{\nu \in N}]$ existiert mit $f((X_\nu)_{\nu \in N}) = 0$. Das gilt offensichtlich nach Definition.

Sei nun $L = K((a_\nu)_{\nu \in N})$ eine rein transzendente Körpererweiterung mit Transzendenzbasis $\{a_\nu : \nu \in N\}$. Betrachte die Auswertungsabbildung

$$\operatorname{eval}\colon K[(X_\nu)_{\nu \in N}] \to K[(a_\nu)_{\nu \in N}] : f \mapsto f((a_\nu)_{\nu \in N}).$$

Sie ist offensichtlich ein surjektiver Ringhomomorphismus, der auf $K$ die Identität ist. Wir zeigen Injektivität und betrachten dazu ein $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{eval})$, das heisst $f((a_\nu)_{\nu\in N}) = 0$. Da $\{a_\nu : \nu \in N\}$ algebraisch unabhängig ist, folgt, dass $f$ das Nullpolynom ist und somit ist die Auswertungsabbildung injektiv. Folglich lässt sich eval zu einem surjektiven Körperhomomorphismus, also einem Körperisomorphismus, der Quotientenkörper $K((X_\nu)_{\nu\in N}) \to K((a_\nu)_{\nu\in N})$ fortsetzen, der auf $K$ die Identität ist.

3. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene dritte Wurzeln von 2 und sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Bestimme alle Körperhomomorphismen

   (a) $\mathbb{Q}(a, i) \to \mathbb{C}$.

   (b) $\mathbb{Q}(a, b) \to \mathbb{C}$.

   *Lösung*: Zur Vorbereitung bestimmen wir alle Homomorphismen $\mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$. Nach dem Eisensteinkriterium für $p = 2$ ist das Polynom $X^3 - 2$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Da es die Nullstelle $a$ hat, ist es das Minimalpolynom von $a$ über $\mathbb{Q}$. Nach Abschnitt 5.3 der Vorlesung haben wir somit einen Isomorphismus

   $$\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(a), \quad f(X) + (X^3 - 2) \mapsto f(a).$$

   Wir müssen also alle Ringhomomorphismen $\mathbb{Q}[X]/(X^3-2) \to \mathbb{C}$ bestimmen. Nach der universellen Eigenschaft des Faktorrings entsprechen diese genau den Ringhomomorphismen $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{\varphi}(X^3 - 2) = 0$. Da $\mathbb{Q}$ der Primkörper von $\mathbb{C}$ ist, ist jeder Homomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ gleich der gegebenen Inklusionsabbildung. Die Ringhomomorphismen $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ sind also genau die Abbildungen $f(X) \mapsto f(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Für einen solchen ist weiter $\tilde{\varphi}(X^3 - 2) = w^3 - 2 = 0$ genau dann, wenn $w \in \mathbb{C}$ eine dritte Wurzel aus 2 ist. Somit entsprechen die Homomorphismen $\mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$ genau den drei verschiedenen dritten Wurzeln aus 2.

   Die Wahl $w = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ liefert dabei in jedem Fall einen Homomorphismus $\mathbb{Q}(a) \hookrightarrow \mathbb{R}$, unabhängig davon, ob $a$ selbst in $\mathbb{R}$ liegt oder nicht.

   (a) Da $\mathbb{Q}(a)$ nach $\mathbb{R}$ eingebettet werden kann, das Polynom $Y^2 + 1$ aber keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt, hat das Polynom auch keine Nullstelle in $\mathbb{Q}(a)$ und ist daher irreduzibel über $\mathbb{Q}(a)$. Somit ist $Y^2+1$ das Minimalpolynom von $i$ über $\mathbb{Q}(a)$. Nach Abschnitt 5.3 der Vorlesung haben wir somit einen Isomorphismus

   $$\mathbb{Q}(a)[Y]/(Y^2 + 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(a, i), \quad f(Y) + (Y^2 + 1) \mapsto f(i).$$

   Mit dem gleichen Argument wie oben folgt, dass man alle Homomorphismen $\mathbb{Q}(a, i) \to \mathbb{C}$ erhält, indem man zuerst einen Homomorphismus $\mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$ wählt und diesen so fortsetzt, dass $i$ auf eine beliebige Nullstelle von $Y^2 + 1$ abgebildet wird. Es gibt also genau 6 verschiedene Körperhomomorphismen $\varphi\colon \mathbb{Q}(a, i) \to \mathbb{C}$, und diese sind bestimmt durch die Wahl von $\varphi(a) \in \{\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{2}, e^{4\pi i/3}\sqrt[3]{2}\}$ und $\varphi(i) \in \{i, -i\}$.

*Aliter 1:* Man kann die Argumente auch anders anordnen und zuerst zeigen, dass man einen Isomorphismus

$$\mathbb{Q}[X,Y]/(X^3-2,Y^2+1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(a,i), \quad f(X,Y)+(X^3+2,Y^2+1) \mapsto f(a,i)$$

hat, und dann in einem einzigen Schritt auf diesen die universelle Eigenschaft des Faktorrings anwenden.

*Aliter 2:* Man kann auch zuerst die Homomorphismen $\mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}(i) \to \mathbb{C}$ bestimmen, wobei letztere den beiden Möglichkeiten von $\varphi(i) \in \{i,-i\}$ entsprechen. Sodann schliesst man, dass sich je zwei solche Homomorphismen zu genau einem Homomorphismus $\mathbb{Q}(a,i) \to \mathbb{C}$ kombinieren lassen, indem man zeigt, dass die natürliche Abbildung

$$\mathbb{Q}(a) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) \longrightarrow \mathbb{Q}(a,i), \quad u \otimes v \mapsto uv$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Sei $c$ die dritte Nullstelle von $X^3-2$. Dann ist $X^3-2=(X-a)(X-b)(X-c)$ und somit $c=\frac{2}{ab} \in \mathbb{Q}(a,b)$, und folglich $\mathbb{Q}(a,b)=\mathbb{Q}(a,b,c)$. Jetzt ist die Situation symmetrisch unter Vertauschung von $a,b,c$. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a=\sqrt[3]{2}$ und $b=e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{2}$ und $c=e^{4\pi i/3}\sqrt[3]{2}$ ist.

Betrachte das Polynom

$$P(Y) \;:=\; (Y-b)(Y-c) \;=\; \frac{Y^3-2}{Y-a} \;\in\; \mathbb{Q}(a)[Y].$$

Da seine Koeffizienten in $\mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{R}$, seine Nullstellen aber nicht in $\mathbb{R}$ liegen, hat es keine Nullstellen in $\mathbb{Q}(a)$. Als Polynom vom Grad 2 ist es somit irreduzibel über $\mathbb{Q}(a)$ und daher gleich dem gemeinsamen Minimalpolynom von $b$ und $c$ über $\mathbb{Q}(a)$. Daraus folgt $[\mathbb{Q}(a,b)/\mathbb{Q}(a)]=2$, und mit der Multiplikativität der Körpergrade

$$[\mathbb{Q}(a,b)/\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a,b)/\mathbb{Q}(a)]\cdot[\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}] = 2\cdot 3 = 6.$$

Ausserdem haben wir nach Abschnitt 5.3 der Vorlesung einen Isomorphismus

$$(*) \qquad \mathbb{Q}(a)[Y]/(P(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(a,b), \quad f(Y)+(P(Y)) \mapsto f(b).$$

Jeden Homomorphismus $\mathbb{Q}(a,b) \to \mathbb{C}$ können wir nun konstruieren, indem wir zuerst einen Homomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$ wählen und diesen dann auf $\mathbb{Q}(a,b)$ fortsetzen. Die Möglichkeiten für $\varphi$ wurden oben beschrieben. Für festes $\varphi$ betrachten wir $\mathbb{C}$ neu als Oberkörper von $\mathbb{Q}(a)$ via der Einbettung $\varphi$. Diese bildet das Polynom $P(Y)$ auf das Polynom ${}^{\varphi}P(Y) := (Y^3-2)/(Y-\varphi(a))$ ab. Mit dem gleichen Argument wie oben, angewendet auf den Isomorphismus $(*)$, entsprechen dann die Fortsetzungen von $\varphi$ auf $\mathbb{Q}(a,b)$ den verschiedenen Nullstellen von ${}^{\varphi}P(Y)$ in $\mathbb{C}$. Diese sind genau die beiden von $\varphi(a)$ verschiedenen dritten Wurzeln aus 2. Die Zahl $c=2/ab$ wird dann auf die verbleibende dritte Wurzel aus 2 abgebildet.

Fazit: Jeder Homomorphismus $\mathbb{Q}(a,b) \to \mathbb{C}$ bildet die Menge $\{a,b,c\}$ bijektiv auf sich ab, und umgekehrt kommt jede solche bijektive Abbildung von genau einem Homomorphismus her. Die Anzahl der Homomorphismen ist somit gleich 6.

*4. Betrachte Körpererweiterungen $M/L/K$. Zeige: $M/K$ ist endlich erzeugt genau dann, wenn $M/L$ und $L/K$ endlich erzeugt sind.

*Lösung*: Sind $L/K$ und $M/L$ endlich erzeugt, so ist auch $M/K$ endlich erzeugt, da die Vereinigung von Erzeugendensystemen von $L/K$ und $M/L$ ein Erzeugendensystem von $M/K$ ist. Ist umgekehrt $M/K$ endlich erzeugt, so ist auch $M/L$ endlich erzeugt, da ein Erzeugendensystem von $M/K$ auch ein Erzeugendensystem von $M/L$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $L/K$ endlich erzeugt ist, wenn $M/K$ endlich erzeugt ist.

Es ist $\operatorname{trdeg}(L/K) \leqslant \operatorname{trdeg}(M/K) < \infty$. Sei $S$ eine endliche Transzendenzbasis von $L/K$, und ergänze $S$ zu einer endlichen Transzendenzbasis $T$ von $M/K$. Dann ist $M/K(T)$ algebraisch und endlich erzeugt, also endlich. Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon L \otimes_{K(S)} K(T) \to M, \qquad \sum_i a_i \otimes b_i \mapsto \sum_i a_i b_i.$$

*Behauptung:* $\varphi$ ist injektiv.

*Beweis:* Wenn nicht, sei $\sum_i a_i \otimes b_i$ ein von 0 verschiedenes Element im Kern von $\varphi$. Wir schreiben jedes $b_i$ als $b_i = \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in K(S)[U]$ für $U := T \smallsetminus S$, und $g_i \neq 0$. Wegen $g := \prod_i g_i \in K(T)^\times$ ist Durchmultiplizieren mit $1 \otimes g$ ein Automorphismus von $L \otimes_{K(S)} K(T)$, wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass alle $b_i \in K(S)[U]$ sind.

Wir schreiben nun $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $b_i = \sum_{\underline{j}} b_{i,\underline{j}} \underline{u}^{\underline{j}}$ für Multiindices $\underline{j}$ und mit $b_{i,\underline{j}} \in K(S)$. Dann ist

$$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i \sum_{\underline{j}} a_i \otimes b_{i,\underline{j}} \underline{u}^{\underline{j}} = \sum_{\underline{j}} \underbrace{\Big(\sum_i a_i b_{i,\underline{j}}\Big)}_{=: c_{\underline{j}}} \otimes \underline{u}^{\underline{j}}.$$

Da $\sum_i a_i \otimes b_i$ nach Voraussetzung von 0 verschieden ist, gibt es mindestens ein $\underline{j}$ mit $c_{\underline{j}} \neq 0$. Aber dann ist auch

$$\varphi\big(\textstyle\sum_i a_i \otimes b_i\big) = \displaystyle\sum_{\underline{j}} c_{\underline{j}} \underline{u}^{\underline{j}} \neq 0,$$

Widerspruch. $\square$

Die Abbildung $\varphi$ ist ein Homomorphismus von $K(T)$-Vektorräumen. Da $\varphi$ injektiv ist, folgt

$$\dim_{K(T)} \big(L \otimes_{K(S)} K(T)\big) \leqslant \dim_{K(T)} M < \infty.$$

Aber andererseits ist $\dim_{K(T)} L \otimes_{K(S)} K(T) = \dim_{K(S)} L$, somit ist auch $L/K(S)$ endlich. Da schon $K(S)/K$ endlich erzeugt ist, ist somit $L/K$ endlich erzeugt.

**5. Der **Satz von Lüroth** besagt: Sei $x$ transzendent über $K$, und sei $K \subsetneqq L \subset K(x)$ ein Zwischenkörper. Dann ist $L = K(y)$ für ein $y \in L$. Beweise diesen Satz, oder lies einen Beweis und fasse das Wesentliche daran zusammen.