Musterlösung 22

Separable und normale Körpererweiterungen

1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeige: Ist $[L/K]$ teilerfremd zu p, so ist L/K separabel.

   Lösung: Sei $a \in L$ beliebig, und sei f das Minimalpolynom von a über K. Wir betrachten den Körperturm $L/K(a)/K$. Wegen $p \nmid [L/K]$ und der Multiplikativität des Körpergrades ist auch $[K(a)/K]$ nicht durch p teilbar. Folglich ist $\deg(f) = [K(a)/K]$ teilerfremd zu p. Aus der Vorlesung wissen wir, dass es ein $r \geqslant 0$ und ein separables irreduzibles Polynom $g(Y) \in K[Y]$ mit $f(X) = g(X^{p^r})$ gibt. Daraus folgt
   $$p^r \deg(g) = \deg(f).$$
   Da $\deg(f)$ nicht durch p teilbar ist, gilt $r = 0$ und damit ist $f = g$ separabel. Folglich ist a separabel über K. Da a beliebig war, ist damit L/K eine separable Erweiterung.

2. Zeige: Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.

   Lösung: Sei L/K eine algebraische Erweiterung eines perfekten Körpers K. Für jedes $a \in L$ ist das Minimalpolynom $m_{a,K} \in K[X]$ irreduzibel. Da K perfekt ist, ist es folglich separabel. Daher ist a separabel über K, und die Körpererweiterung L/K ist separabel.

   Umgekehrt sei jede algebraische Erweiterung eines Körpers K separabel über K. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel. Da Multiplikation mit Elementen aus $K^\times$ die Separabilität von f nicht beeinflusst, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f normiert ist. Dann ist $L := K[X]/(f)$ algebraisch über K, und die Restklasse von X hat das Minimalpolynom f. Da L/K separabel ist, ist folglich f separabel. Also ist K perfekt.

3. Zeige: Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ ist M/K genau dann separabel, wenn M/L und L/K separabel sind.

   Lösung: Sei M/K separabel und sei $a \in M$. Sein Minimalpolynom $m_{a,K}$ über K ist dann nach Voraussetzung separabel. Da das Minimalpolynom von a über L das Polynom $m_{a,K}$ teilt, ist es ebenfalls separabel. Also ist a auch über L separabel und die Erweiterung M/L ist separabel. Sei andererseits $b \in L$. Dann ist auch $b \in M$, also ist b separabel über K, und die Erweiterung L/K ist separabel.

Seien umgekehrt M/L und L/K separabel und sei $a \in M$. Betrachte sein Minimalpolynom $m_{a,L}$ über L. Sei $L' \subset L$ der Zwischenkörper, der von den Koeffizienten von $m_{a,L}$ über K erzeugt wird. Da er von endlich vielen über K algebraischen Elementen erzeugt wird, ist er endlich über K. Als Zwischenerweiterung der separablen Erweiterung L/K ist ausserdem L'/K separabel, wie oben gezeigt. Nun ist a algebraisch über L' mit demselben Minimalpolynom $m_{a,L'} = m_{a,L}$. Da M/L separabel ist, ist dieses Polynom separabel; also ist a separabel über L'. Nach einer Proposition der Vorlesung ist damit auch die endliche Erweiterung $M' := L'(a)$ von L' separabel.

Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Da L'/K separabel ist, gilt

$$\left|\mathrm{Hom}_K(L', \overline{K})\right| = [L'/K].$$

Für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(L', \overline{K})$ betrachte $\overline{K}$ als Oberkörper von L' via der Einbettung φ. Damit wird $\overline{K}$ auch ein algebraischer Abschluss von L'. Da M'/L' separabel ist, folgt daraus

$$\left|\left\{\psi \in \mathrm{Hom}_K(M', \overline{K}) \;:\; \psi|_{L'} = \varphi\right\}\right| \;=\; \left|\mathrm{Hom}_{L'}(M', \overline{K})\right| \;=\; [M'/L'].$$

Durch Aufsummieren über alle φ und aus der Multiplikativität des Körpergrads folgt daraus insgesamt

$$\left|\mathrm{Hom}_K(M', \overline{K})\right| = [M'/K].$$

Da M'/K endlich ist, ist diese Erweiterung somit separabel. Insbesondere ist das Element $a \in M'$ separabel über K. Da $a \in M$ beliebig war, ist also M/K separabel, was zu zeigen war.

*4. Betrachte eine algebraische Körpererweiterung L/K und setze

$$L' \;:=\; \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}.$$

Zeige:

(a) L' ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K, welcher separabel über K ist.

(b) Ist $L' \neq L$, so ist $p := \mathrm{char}(K) > 0$ und für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in L'$. (Man nennt L/L' dann *rein inseparabel.*)

(c) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist jede separable algebraische Körpererweiterung von L' trivial. (Man nennt L' dann *separabel abgeschlossen.*)

Lösung: (a) Seien $a, b \in L'$. Dann ist $K(a,b)$ von über K separablen Elementen erzeugt und daher separabel über K. Also liegen Summe, Differenz, Produkt und, falls definiert, Quotient von a und b in einer separablen Erweiterung von K, sind daher separabel und liegen somit in L'. Also ist L' ein Körper. Nach Definition ist er separabel über K. Sei L'' ein weiterer Zwischenkörper der Erweiterung L/K

mit L''/K separabel. Dann ist jedes Element $c \in L''$ separabel über K und liegt daher in L'. Also gilt $L'' \subset L'$ und L' ist eindeutig maximal.

(b) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jede algebraische Körpererweiterung eines Körpers der Charakteristik 0 separabel ist. Also folgt aus $L \neq L'$, dass $p := \mathrm{char}(K) > 0$ gilt. Sei $a \in L'$. Laut Abschnitt 5.10 hat das Minimalpolynom von a über K die Form $g(X^{p^r})$ für ein $r \geqslant 0$ und ein separables irreduzibles $g \in K[X]$. Dann ist a^{p^r} eine Nullstelle von g, also ist g das Minimalpolynom von a^{p^r} über K. Da g separabel ist, ist folglich a^{p^r} separabel über K, also $a^{p^r} \in L'$.

(c) Sei L''/L' separabel. Da L algebraisch abgeschlossen und L''/L' algebraisch ist, können wir nach dem Satz aus Abschnitt 5.7 annehmen, dass L'' ein Unterkörper von L ist. Dann sind die Körpererweiterungen L''/L' und L'/K separabel, also nach der vorherigen Aufgabe auch L''/K. Mit Teil (a) folgt die Inklusion $L'' \subset L'$, also gilt $L'' = L'$.

5. Ist für folgendes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ normal? Falls nicht, bestimme eine normale Hülle.

   (a) $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

   (b) $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$

Lösung: (a) Doppeltes Quadrieren ergibt, dass α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2$ ist. Dieses ist nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und deshalb das Minimalpolynom von α. Die anderen drei Nullstellen von f sind $-\alpha$ und

$$\pm\sqrt{2-\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \pm\frac{\alpha^2-2}{\alpha}$$

und liegen ebenfalls in $\mathbb{Q}(\alpha)$. Also ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper von $f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ und somit ist $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ normal.

(b) Doppeltes Quadrieren ergibt, dass α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2$ ist. Dieses ist nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und deshalb das Minimalpolynom von α. Die anderen drei Nullstellen von f sind $-\alpha$ und

$$\pm i\sqrt{\sqrt{3}-1} = \pm\frac{i\sqrt{2}}{\alpha} \notin \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}.$$

Der Zerfällungskörper von $f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$ ist somit $\mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{\sqrt{3}-1}) = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$. Da dieser nicht in $\mathbb{Q}(\alpha)$ enthalten ist, ist $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ somit nicht normal. Seine normale Hülle in $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$.

*6. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Körper der über $\mathbb{Q}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist.

Lösung: Wir erinnern daran, dass L gerade die Menge der Elemente in $\mathbb{C}$ ist, die in einem quadratischen Körperturm $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$ über $\mathbb{Q}$ enthalten sind. Für jeden solchen Körperturm und jeden Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ in einen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ ist $\varphi(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \subset \varphi(K_1) \subset \ldots \subset \varphi(K_n)$ wiederum ein quadratischer Erweiterungsturm über $\mathbb{Q}$, also in L enthalten. Damit gilt $\varphi(L) \subset L$ für jeden solchen Homomorphismus φ; anders gesagt ist $L/\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung.