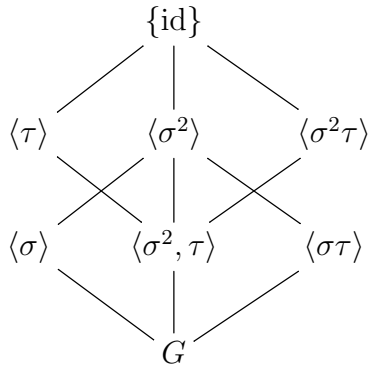
Musterlösung 27

Kreisteilungskörper und abelsche Körpererweiterungen

1. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 15te Einheitswurzel. Erstelle eine Liste aller Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, mitsamt Inklusionen.

   Lösung: Aus der Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms Φ_{15} folgt, dass $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ ist. Wegen des chinesischen Restsatzes gilt $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_3$ und somit $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{F}_5^\times \times \mathbb{F}_3^\times$. Hier ist $\mathbb{F}_5^\times$ zyklisch der Ordnung $5-1=4$, und $\mathbb{F}_3^\times$ ist zyklisch der Ordnung $3-1=2$. Konkret hat zum Beispiel die Restklasse von 2 die verschiedenen Potenzen $2, 4, 8, 16 \cong 1 \bmod 15$, entspricht also einem Element $\sigma \in G$ der Ordnung 4. Die Restklasse von -1 liegt nicht in der von $2 \bmod 5$ erzeugten Untergruppe von $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ und entspricht einem Element $\tau \in G$ der Ordnung 2. Somit ist $G = \langle\sigma\rangle \times \langle\tau\rangle$ und es gilt $\sigma(\zeta) = \zeta^2$ und $\tau(\zeta) = \zeta^{-1}$.

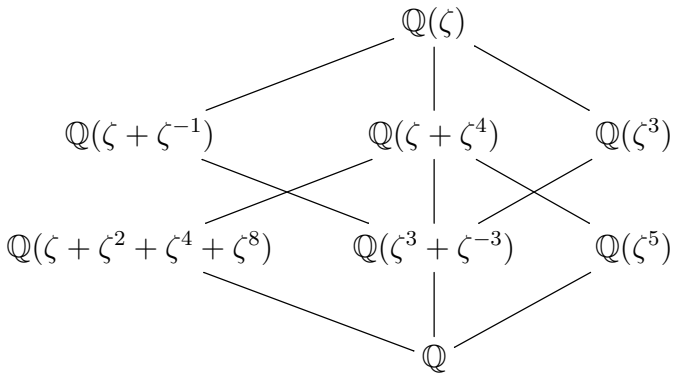
   Wir machen nun eine Aufstellung aller Untergruppen von G (die Vollständigkeitskontrolle überlassen wir dem Leser):



   Die entsprechenden Zwischenerweiterungen sind:

   - $\mathbb{Q}(\zeta)^{\{\mathrm{id}\}} = \mathbb{Q}(\zeta)$.
   - $\mathbb{Q}(\zeta)^G = \mathbb{Q}$.
   - Es ist $\tau(\zeta+\zeta^{-1}) = \zeta^{-1}+\zeta$, also $\zeta+\zeta^{-1} \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\tau\rangle}$. Zudem ist ζ eine Nullstelle des Polynoms $X^2-(\zeta+\zeta^{-1})X+1 \in \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})[X]$, also ist $[\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})] \leqslant 2$ und somit $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$.
   - Es ist $\sigma^2(\zeta+\zeta^4) = \zeta^4+\zeta$, also $\zeta+\zeta^4 \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma^2\rangle}$. Zudem hat $\zeta+\zeta^4$ unter G genau die weiteren Konjugierten $\zeta^2+\zeta^8$, $\zeta^{-1}+\zeta^{-4}$ und $\zeta^{-2}+\zeta^{-8}$, also ist $|\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^4), \overline{\mathbb{Q}})| = [\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^4)/\mathbb{Q}] = 4$ und somit $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma^2\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^4)$.

- Es ist $(\sigma^2\tau)(\zeta^3) = (\zeta^3)^{-4} = \zeta^3$, also $\zeta^3 \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma^2\tau\rangle}$. Zudem ist ζ^3 eine primitive 5-te Einheitswurzel, also ist $[\mathbb{Q}(\zeta^3)/\mathbb{Q}] = 4$ und $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma^2\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta^3)$.
- Es ist $\sigma(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8) = \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta$, also $\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma\rangle}$. Zudem ist $\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 \notin \mathbb{Q}$, also $[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8)/\mathbb{Q}] \geqslant 2$ und somit $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8)$.
- Es ist $\tau(\zeta^3 + \zeta^{-3}) = \zeta^{-3} + \zeta^3$ und $\sigma^2(\zeta^3 + \zeta^{-3}) = (\zeta^3)^4 + (\zeta^{-3})^4 = \zeta^{-3} + \zeta^3$, also $\mathbb{Q}(\zeta^3 + \zeta^{-3}) \subset \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma^2,\tau\rangle}$. Zudem ist $\zeta^3 + \zeta^{-3} \notin \mathbb{Q}$, also $[\mathbb{Q}(\zeta^2 + \zeta^{-2})] \geqslant 2$ und somit $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma^2,\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta^3 + \zeta^{-3})$.
- Es ist $(\sigma\tau)(\zeta^5) = (\zeta^5)^{-2} = \zeta^5$, also ist $\zeta^5 \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma\tau\rangle}$. Zudem ist ζ^5 eine primitive dritte Einheitswurzel, also ist $[\mathbb{Q}(\zeta^5)/\mathbb{Q}] = 2$ und $\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\sigma\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta^5)$.



2. Konstruiere ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 5 mit Galoisgruppe $\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Beschreibe die komplexen Nullstellen von f durch Radikale.

   Lösung: Nach dem Satz von Kronecker-Weber wird der Zerfällungskörper von f ein Unterkörper eines Kreisteilungskörpers sein. Wir suchen also einen solchen vom Grad 5 über $\mathbb{Q}$. Die kleinstmögliche Zahl $n \geqslant 1$, so dass der Grad $[\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}] = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ ein Vielfaches von 5 ist, ist $n = 11$. Dann ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{11})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ zyklisch der Ordnung 10. Deren Untergruppe $\{\pm 1\}$ ist normal der Ordnung 2; ihre Faktorgruppe ist also zyklisch der Ordnung 5. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie Teil (e) ist der zugehörige Zwischenkörper folglich zyklisch vom Grad 5 über $\mathbb{Q}$.

   Um diesen explizit zu beschreiben, wähle eine primitive elfte Einheitswurzel $\zeta \in \mu_{11}$. Dann ist $\zeta + \zeta^{-1}$ invariant unter $\{\pm 1\}$, liegt also in dem gesuchten Zwischenkörper. Wegen $\zeta^2 - (\zeta + \zeta^{-1})\zeta + 1 = 0$ ist andererseits $[\mathbb{Q}(\mu_{11})/\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})] \leqslant 2$. Wie in Serie 26 Aufgabe 5 folgt daraus, dass der gesuchte Zwischenkörper gleich $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ ist.

Um das Minimalpolynom von $\zeta+\zeta^{-1}$ zu bestimmen, potenzieren wir und rechnen:

$$\begin{aligned}
(\zeta+\zeta^{-1})^5 &= \zeta^5+5\zeta^3+10\zeta+10\zeta^{-1}+5\zeta^{-3}+\zeta^{-5}\\
(\zeta+\zeta^{-1})^4 &= \zeta^4+4\zeta^2+6+4\zeta^{-2}+\zeta^{-4}\\
(\zeta+\zeta^{-1})^5+(\zeta+\zeta^{-1})^4 &= 4\zeta^3+3\zeta^2+9\zeta+5+9\zeta^{-1}+3\zeta^{-2}+4\zeta^{-3}\\
(\zeta+\zeta^{-1})^3 &= \zeta^3+3\zeta+3\zeta^{-1}+\zeta^{-3}\\
(\zeta+\zeta^{-1})^2 &= \zeta^2+2+\zeta^{-1}\\
(\zeta+\zeta^{-1})^5+(\zeta+\zeta^{-1})^4-4(\zeta+\zeta^{-1})^3-3(\zeta+\zeta^{-1})^2 &= -3\zeta-1-3\zeta^{-1}.
\end{aligned}$$

Also ist $\zeta+\zeta^{-1}$ eine Nullstelle des Polynoms

$$f(X) \;:=\; X^5+X^4-4X^3-3X^2+3X+1 \;\in\; \mathbb{Z}[X].$$

Wegen $[\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})/\mathbb{Q}]=5$ muss dies schon das Minimalpolynom von $\zeta+\zeta^{-1}$ über $\mathbb{Q}$ sein. Seine Nullstellen sind genau die Galoiskonjugierten von $\zeta+\zeta^{-1}$, also die Zahlen $\zeta^k+\zeta^{-k}$ für $k=1,\ldots,5$. Da $\zeta^{\pm k}$ bereits eine 11-te Wurzel aus 1 ist, ist dies eine Darstellung durch Radikale, wie gewünscht.

3. *(Artin-Schreier Theorie)* Sei K ein Körper der Charakteristik $p>0$. Sei L/K galoissch mit $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K) = \langle\gamma\rangle$ zyklisch der Ordnung p.

   (a) Bestimme die Jordansche Normalform von γ betrachtet als Endomorphismus des K-Vektorraumes L.

   (b) Zeige: Es existiert ein $a\in L$ mit $\gamma(a)=a+1$.

   (c) Zeige: Es existiert ein $a\in L$ mit $L=K(a)$ und $a^p-a\in K$.

   Vergleiche Serie 21 Aufgabe 3.

   Lösung: (a) Wegen $\gamma^p=\mathrm{id}_L$ ist das Minimalpolynom von γ ein Teiler von $X^p-1 = (X-1)^p \in K[X]$. Der einzige Eigenwert von γ ist also 1 und damit ist γ trigonalisierbar über K. Weiter ist die Anzahl Jordan-Blöcke der Matrix gleich der geometrischen Vielfachheit von 1. Wegen

$$\{a\in L \mid \gamma(a)=a\} = L^{\langle\gamma\rangle} = K$$

   hat der Eigenraum zum Eigenwert 1 die K-Dimension 1. Also ist die geometrische Vielfachheit gleich 1, und die Jordansche Normalform von γ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1\\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ die K-Basis von L, die der Jordanschen Normalform von γ entspricht. Dann gilt $\gamma(v_1) = v_1$ und $\gamma(v_2) = v_1 + v_2$. Für $a := \frac{v_2}{v_1}$ gilt dann

$$\gamma(a) = \frac{\gamma(v_2)}{\gamma(v_1)} = \frac{v_1 + v_2}{v_1} = a + 1.$$

(c) Das Element a aus (b) liegt nicht in K, da $\gamma(a) \neq a$ gilt. Es erzeugt also einen Zwischenkörper $K \subsetneq K(a) \subset L$. Da $[L/K] = p$ prim ist, folgt aus der Multiplikativität des Körpergrades, dass $K(a) = L$ gilt. Weiter ist

$$\gamma(a^p - a) = \gamma(a)^p - \gamma(a) = (a+1)^p - (a+1) = a^p - a$$

und somit $a^p - a \in K$.

4. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad m. Für jedes $\alpha \in L$ ist die *Norm* $N_{L/K}(\alpha)$ definiert als Determinante der K-linearen Abbildung $\mu_\alpha \colon L \to L$, $x \mapsto \alpha x$. Zeige:

   (a) Ist $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ das Minimalpolynom von $\alpha \in L$ über K, so gilt $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^m a_0^{m/n}$.

   (b) Die Norm induziert einen Homomorphismus $L^\times \to K^\times$, $\alpha \mapsto N_{L/K}(\alpha)$.

   (c) Ist L/K separabel und $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ für einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K, so gilt $N_{L/K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_m(\alpha)$.

   (d) *(Hilberts Satz 90)* Ist L/K galoissch und $\mathrm{Gal}(L/K)$ zyklisch mit Erzeugendem σ und ist $\alpha \in L^\times$ mit $N_{L/K}(\alpha) = 1$, so ist $\alpha = \sigma(\beta)/\beta$ für ein $\beta \in L^\times$.

Lösung: (a) Da α den Grad n über K hat, ist $(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$ eine Basis von $K(\alpha)$ über K. Sei ausserdem $(\beta_1, \ldots, \beta_{m/n})$ eine Basis von L über $K(\alpha)$. Wie im Beweis der Multiplikativität des Körpergrads ist dann

$$(\beta_1, \alpha\beta_1, \ldots, \alpha^{n-1}\beta_1, \beta_2, \ldots, \alpha^{n-1}\beta_{m/n})$$

eine Basis von L über K. Bezüglich dieser hat die Darstellungsmatrix von μ_α die Blockform

$$\begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K).$$

Somit ist $N_{L/K}(\alpha) = \det(B)^{m/n} = (-1)^m a_0^{m/n}$.

(b) Zunächst stellen wir fest, dass für jedes $\alpha \in L^\times$ die Abbildung μ_α bijektiv ist; also ist in der Tat $N_{L/K}(\alpha) \in K^\times$. Für je zwei Elemente $\alpha, \beta \in L^\times$ gilt weiter

$\mu_{\alpha\beta} = \mu_\alpha \circ \mu_\beta$. Aus der Multiplikativität der Determinante folgt also $N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha) \cdot N_{L/K}(\beta)$.

(c) Die Bilder von α unter den Einbettungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sind gerade die verschiedenen Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des Minimalpolynoms von α. Sei $\mathrm{Hom}_K(K(\alpha), \overline{L}) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$. Jedes τ_i hat genau $[L/K(\alpha)] = m/n$ Fortsetzungen auf L. Das impliziert für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$, dass $|\{1 \leqslant i \leqslant m : \sigma_i(\alpha) = \alpha_j\}| = m/n$ ist. Nach dem Satz von Vieta ist $\alpha_1 \cdots \alpha_n = (-1)^n a_0$, und somit ist $\sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_m(\alpha) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{m/n} = \big((-1)^n a_0\big)^{m/n} = (-1)^m a_0^{m/n} = N_{L/K}(\alpha)$.

(d) Die gesuchte Bedingung an β ist äquivalent zu $\sigma(\beta) = \alpha\beta$. Wir finden ein solches β durch Ansatz. Nach der Vorlesung sind $\mathrm{id}, \sigma, \ldots, \sigma^{m-1}$ als Elemente des L-Vektorraums aller Abbildungen $L \to L$ linear unabhängig. Folglich ist ihre L-Linearkombination

$$\varphi \;:=\; \mathrm{id} + \alpha^{-1} \cdot \sigma + \alpha^{-1}\sigma(\alpha^{-1}) \cdot \sigma^2 + \ldots + \alpha^{-1}\sigma(\alpha^{-1}) \cdots \sigma^{m-2}(\alpha^{-1}) \cdot \sigma^{m-1}$$

ungleich null. Wähle ein beliebiges $\gamma \in L$ mit $\beta := \varphi(\gamma) \neq 0$. Nach Voraussetzung und (c) gilt

$$N_{L/K}(\alpha) = \alpha \cdot \sigma(\alpha) \cdots \sigma^{m-1}(\alpha) = 1.$$

Mittels einer direkten Rechnung impliziert dies $\alpha^{-1}\sigma(\beta) = \beta$. Für dieses ist dann $\alpha = \frac{\sigma(\beta)}{\beta}$, wie gewünscht.

*5. *(Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms)* Sei n eine positive ganze Zahl und sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normierter irreduzibler Faktor von $X^n - 1$ mit Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$.

(a) Zeige: Für jede nichtnegative ganze Zahl k existiert ein eindeutiges Polynom $g_k \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\deg(g_k) < \deg(f)$ und $f(\xi^k) = g_k(\xi)$. Zeige ausserdem, dass die Menge $\{g_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ endlich ist.

(b) Sei $a := \sup\{|u| : u \text{ ist Koeffizient eines } g_k\}$. Zeige: Ist $k = p$ prim, so teilt p alle Koeffizienten von g_p. Schliesse daraus, dass für alle $p > a$ das Polynom g_p gleich Null ist. [*Hinweis:* $f(\xi^p) = f(\xi^p) - f(\xi)^p$]

(c) Folgere: Wenn alle Primfaktoren einer ganzen Zahl m grösser als a sind, dann gilt $f(\xi^m) = 0$.

(d) Zeige: Für jede zu n teilerfremde ganze Zahl r gilt $f(\xi^r) = 0$. [*Hinweis:* Betrachte $m := r + n \prod_{p \leqslant a, p \nmid r} p$]

(e) Zeige, dass das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n irreduzibel ist.

Lösung: Note that any factor of $X^n - 1$ in $\mathbb{Z}[X]$ is monic up to sign, and by Gauss' Lemma it is irreducible in $\mathbb{Z}[X]$ if and only if it is irreducible in $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Since f is monic and irreducible, it is the minimal polynomial of ξ over $\mathbb{Q}$. Consequently $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}[X]/(f(X))$ is an algebraic extension of $\mathbb{Q}$ of degree $\deg(f)$ with the basis $1, \xi, \ldots, \xi^{\deg(f)-1}$ over $\mathbb{Q}$. Thus $f(\xi^k) \in \mathbb{Q}(\xi)$ can be expressed in at

most one way as $f(\xi^k) = g_k(\xi)$ with $g_k \in \mathbb{Z}[X]$ of degree $< \deg(f)$, and we only have to check existence. Let g_k be the remainder of $f(X^k)$ divided by f, then g_k satisfies the desired properties.

Since the set $\{\xi^k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ is finite, by uniqueness, so is the set of the g_k's.

(b) Since exponentiation by p is a ring homomorphism modulo p (the Frobenius of degree p), we have $f(X^p) \equiv f(X)^p$ modulo $p\mathbb{Z}[X]$. In other words there exists a polynomial $h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ with $f(X^p) = f(X)^p + ph(X)$. By the same argument as in (a) there exists a unique polynomial $g_h \in \mathbb{Z}[X]$ of degree less than $\deg(f)$ with $h(\xi) = g_h(\xi)$. Since $f(\xi) = 0$, it follows that

$$g_k(\xi) = f(\xi^p) = ph(\xi) = pg_h(\xi).$$

By the uniqueness of g_p we conclude that $g_p = pg_h \in p\mathbb{Z}[X]$.

If $p > a$, all coefficients of g_p have absolute value less than p and are divisible by p; hence they are zero; thus $g_p = 0$.

(c) For every prime $p > a$ we have $f(\xi^p) = g_p(\xi) = 0$ by (b). Thus ξ^p is another root of f. As f is irreducible, we therefore have $\xi^p = \gamma(\xi)$ for some $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q})$. For every k it follows that

$$f(\xi^{pk}) = f(\gamma(\xi)^k) = \gamma(f(\xi^k)) = \gamma(g_k(\xi)) = g_k(\gamma(\xi)) = g_k(\xi^k).$$

Thus the assertions of (a) and (b) are equally true for ξ^p in place of ξ.

Now we can prove (c) in general by induction on the number of prime factors of m. If this number is $\leqslant 1$, we are already done. Otherwise write $m = pm'$ with a prime p. Then by the above we have $f(\xi^p) = 0$, and applying the induction hypothesis with (m', ξ^p) in place of (m, ξ) we deduce that $f(\xi^{pm'}) = 0$, as desired.

(d) Set $m := r + n\ell$ with $\ell := \prod_{p \leqslant a, p \nmid r} p$. Then any prime $p \leqslant a$ not dividing r divides ℓ; hence it does not divide m. Any prime $p \leqslant a$ dividing r does not divide n by assumption; so it also does not divide $n\ell$; hence it does not divide m. Together this shows that all prime divisors of m are greater than a. Since $\xi^n = 1$, from (c) we therefore deduce that $f(\xi^r) = f(\xi^m) = 0$.

(e) Let $\xi \in \mathbb{C}$ be a root of unity of precise order n. Then the numbers ξ^r for $r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ are all distinct. Let $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ be the monic irreducible factor of $X^n - 1$ with $f(\xi) = 0$. Then (d) implies that

$$\Phi_n(X) \ := \prod_{r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} (X - \xi^r)$$

divides $f(X)$. We already know that Φ_n lies in $\mathbb{Q}[X]$. Since f is irreducible in $\mathbb{Q}[X]$ and both polynomials are monic, it follows that $\Phi_n = f$. Thus Φ_n is irreducible.