

Serie 15

KÖRPERERWEITERUNGEN, KÖRPERERWEITERUNGSGRAD

1. Gegeben seien ein Körper K , eine nichtleere Indexmenge I und für jedes $i \in I$ ein Unterkörper $K_i \subset K$. Zeige: $\bigcap_{i \in I} K_i$ ist ein Unterkörper von K .
2. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung L/K . Zeige: Sind $[K_1/K]$ und $[K_2/K]$ teilerfremd, dann sind K_1 und K_2 linear disjunkt.
3. Zeige: Für jede Körpererweiterung L/K sind äquivalent:
 - (a) $[L/K] = 2$.
 - (b) Es existiert $a \in L \setminus K$ mit $L = K(a)$ sowie $a^2 \in K$ oder $a^2 + a \in K$.
4. (a) Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}] = 4$.
(b) Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
- **5. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K . Gilt die Ungleichung $[K_1K_2/K_2] \leq [K_1/K]$ allgemein im Sinne von Kardinalzahlen?