D-MATH | Algebra II | FS 2016
Prof. Richard Pink

Serie 16

einfache und algebraische Erweiterungen

1. Bestimme das Minimalpolynom folgender komplexer Zahlen über $\mathbb{Q}$:

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

   (b) $\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}$.

   (c) $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{5}i$.

2. Stelle für $\alpha=\sqrt{-3+\sqrt{12}}$ folgende Zahlen als Polynom in α mit möglichst kleinem Grad dar:

   (a) $(\alpha^3+1)(\alpha^3-\alpha+4)$.

   (b) $\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$.

3. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha,\beta\in L$. Zeige: α und β sind genau dann algebraisch über K, wenn $\alpha+\beta$ und $\alpha\cdot\beta$ algebraisch über K sind.

4. Zeige, dass πi transzendent ist.

*5. Sei K ein Körper und $L=K(t)$ der rationale Funktionenkörper über K in einer Variablen t.

   (a) Zeige, dass für jeden Zwischenkörper $K \subsetneqq K' \subset L$ die Erweiterung L/K' algebraisch und die Erweiterung K'/K transzendent ist.

   (b) Sei $s=P(t)/Q(t)\in L$ mit teilerfremden Polynomen $P(X)$, $Q(X)\in K[X]$. Bestimme den Grad der Körpererweiterung $L/K(s)$ in Termen der Grade von P und Q.

   (c) Zeige, dass die Körperautomorphismen von L, welche auf K die Identität sind, genau die Abbildungen der Form
   $$L\to L,\ f(t)\mapsto f\Big(\frac{at+b}{ct+d}\Big)$$
   sind für alle Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{GL}_2(K)$.