Algebra II

FS 2016

Serie 18

Transzendente Erweiterungen und Körperhomomorphismen

1. Seien L/K und M/L Körpererweiterungen. Zeige, dass

$$\operatorname{trdeg}(M/K) = \operatorname{trdeg}(M/L) + \operatorname{trdeg}(L/K)$$

ist.

2. Zeige: Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann rein transzendent, wenn L isomorph über K zum Quotientenkörper eines Polynomrings über K ist.

   Bemerkung: Isomorph über K bedeutet, dass ein Isomorphismus existiert, der auf K die Identität ist.

3. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene dritte Wurzeln von 2 und sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Bestimme alle Körperhomomorphismen

   (a) $\mathbb{Q}(a, i) \to \mathbb{C}$.

   (b) $\mathbb{Q}(a, b) \to \mathbb{C}$.

*4. Betrachte Körpererweiterungen $M/L/K$. Zeige: M/K ist endlich erzeugt genau dann, wenn M/L und L/K endlich erzeugt sind.

5. Der **Satz von Lüroth besagt: Sei x transzendent über K, und sei $K \subsetneqq L \subset K(x)$ ein Zwischenkörper. Dann ist $L = K(y)$ für ein $y \in L$. Beweise diesen Satz, oder lies einen Beweis und fasse das Wesentliche daran zusammen.