

Serie 19

KÖRPERHOMOMORPHISMEN UND ZERFÄLLUNGSKÖRPER

1. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeige, dass jeder Körperhomomorphismus $\varphi: L \rightarrow L$ über K ein Automorphismus ist.
2. (a) Zeige, dass $\text{id}_{\mathbb{R}}$ der einzige Körperendomorphismus von \mathbb{R} ist.
(*b) Zeige, dass \mathbb{C} überabzählbar viele Körperendomorphismen hat.
(**c) Zeige, dass die Kardinalität in (b) echt grösser als die von \mathbb{R} ist.
- *3. Finde für jedes $n \geq 1$ ein Beispiel einer Körpererweiterung vom Grad n mit trivialer Automorphismengruppe.
4. (a) Beweise, dass $(X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1)$ und $X^5 - 3X^3 + X^2 - 3$ dieselben Zerfällungskörper K über \mathbb{Q} haben, und finde $[K/\mathbb{Q}]$.
(b) Bestimme den Grad eines Zerfällungskörpers des Polynoms $X^3 + X^2 + 1$ über \mathbb{Q} und über \mathbb{F}_2 .
5. Sei K ein Körper und sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K . Beweise:
 - (a) Es gilt $[L/K] | n!$.
 - (b) Im Fall $[L/K] = n!$ ist f irreduzibel über K .