

## Serie 19

### KÖRPERHOMOMORPHISMEN UND ZERFÄLLUNGSKÖRPER

1. Sei  $L/K$  eine algebraische Körpererweiterung. Zeige, dass jeder Körperhomomorphismus  $\varphi: L \rightarrow L$  über  $K$  ein Automorphismus ist.
2. (a) Zeige, dass  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  der einzige Körperendomorphismus von  $\mathbb{R}$  ist.  
(\*b) Zeige, dass  $\mathbb{C}$  überabzählbar viele Körperendomorphismen hat.  
(\*\*c) Zeige, dass die Kardinalität in (b) echt grösser als die von  $\mathbb{R}$  ist.
- \*3. Finde für jedes  $n \geq 1$  ein Beispiel einer Körpererweiterung vom Grad  $n$  mit trivialer Automorphismengruppe.
4. (a) Beweise, dass  $(X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1)$  und  $X^5 - 3X^3 + X^2 - 3$  dieselben Zerfällungskörper  $K$  über  $\mathbb{Q}$  haben, und finde  $[K/\mathbb{Q}]$ .  
(b) Bestimme den Grad eines Zerfällungskörpers des Polynoms  $X^3 + X^2 + 1$  über  $\mathbb{Q}$  und über  $\mathbb{F}_2$ .
5. Sei  $K$  ein Körper und sei  $f \in K[X]$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$ . Sei  $L$  ein Zerfällungskörper von  $f$  über  $K$ . Beweise:
  - (a) Es gilt  $[L/K] | n!$ .
  - (b) Im Fall  $[L/K] = n!$  ist  $f$  irreduzibel über  $K$ .