D-MATH | Algebra II | FS 2016
Prof. Richard Pink

Serie 20

Algebraischer Abschluss und separable Polynome

1. Zeige: Sind L/K eine algebraische und M/L eine beliebige Körpererweiterung, so ist M ein algebraischer Abschluss von L genau dann, wenn M ein algebraischer Abschluss von K ist.

2. Sei L/K eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst *der (relative) algebraische Abschluss von K in L*. Zeige:

   (a) $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K, der algebraisch über K ist.

   (b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K im Sinne der Vorlesung.

   (c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

   (*d) Seien $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}}/\overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

3. Zeige, dass endliche Körper nicht algebraisch abgeschlossen sind.

4. Sei $h \in K[X]$ ein grösster gemeinsamer Teiler zweier Polynome $f, g \in K[X] \smallsetminus \{0\}$. Zeige: Für jeden Oberkörper L/K ist h auch ein grösster gemeinsamer Teiler von f und g in $L[X]$.

5. Für welche Primzahlen p ist das Polynom $f(X) := X^3 + X + 3 \in \mathbb{F}_p[X]$ separabel?

*6. Sei K ein Körper, und betrachte den Ring $R := K[T]/(T^n)$ für ein $n \geqslant 2$. Konstruiere ein normiertes Polynom in $R[X]$, welches verschiedene Zerlegungen in normierte Linearfaktoren besitzt, die nicht durch Vertauschung ineinander übergehen.