D-MATH | Algebra II | FS 2016
Prof. Richard Pink

Serie 23

Satz vom primitiven Element und Galoiserweiterungen

1. Finde ein primitives Element der Erweiterung L von K in den folgenden Fällen:

   (a) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

   (b) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

   (c) $K = \mathbb{C}(t, u)$ mit t, u algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$ und $L = K(\alpha, \beta)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $X^n - t$ und β eine Nullstelle von $X^m - u$ ist.

*2. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

   (a) Zeige: Für jede algebraische Erweiterung der Form $L = K(A)$ von K sind äquivalent:

      (i) Für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in K$.

      (ii) Für jedes $a \in A$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in K$.

      (iii) $|\operatorname{Hom}_K(L, \overline{K})| = 1$.

      Eine Körpererweiterung L/K mit diesen Eigenschaften heisst *rein inseparabel* oder *total inseparabel* oder *radiziell*.

   (b) Zeige: Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ ist M/K rein inseparabel genau dann, wenn M/L und L/K rein inseparabel sind.

3. Zeige, dass die Substitutionen $t \mapsto 1/t$ und $t \mapsto 1 - t$ eine endliche Untergruppe G der Automorphismengruppe des rationalen Funktionenkörpers $L := \mathbb{Q}(t)$ erzeugen. Bestimme den Fixkörper $K := L^G$ in der Form $K = \mathbb{Q}(s)$ sowie das Minimalpolynom von t über K.

4. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel und sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeige: Ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch, so ist $L = K(a)$ für eine beliebige Nullstelle $a \in L$ von f.