Serie 24

Galoiserweiterungen

1. Betrachte $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{R}$.

   (a) Zeige, dass $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist mit Galoisgruppe $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (b) Sei $L := K\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}\right) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist.

   (*c) Bestimme $[L/\mathbb{Q}]$.

   (*d) Bestimme $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bis auf Isomorphie.

2. Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^6 - 5$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ mitsamt Inklusionen sowie, falls sie galoissch über $\mathbb{Q}$ sind, deren Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$.

3. (a) Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom, dessen Grad eine Primzahl p ist und das genau zwei nicht reelle Nullstellen hat. Beweise, dass die Galoisgruppe von f gleich S_p ist.

   (*b) Finde für jede Primzahl p ein Polynom wie in (a).

4. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und seien E, E' zwei Zwischenkörper. Zeige, dass E und E' genau dann isomorph über K sind, wenn $\mathrm{Gal}(L/E)$ und $\mathrm{Gal}(L/E')$ in $\mathrm{Gal}(L/K)$ konjugiert sind.

*5. Sei K ein Körper und sei f ein irreduzibles separables normiertes Polynom in $K[X]$ von geradem Grad $2d$, das *palindromisch* ist, das heisst, die Form

$$f(X) = X^{2d} + a_1X^{2d-1} + \cdots + a_{d-1}X^{d+1} + a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + 1$$

hat für gewisse $a_1, \ldots, a_d \in K$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K und sei $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige:

   (a) Für jede Nullstelle a von f ist $\frac{1}{a}$ auch eine Nullstelle.

   (b) Die Gruppe G besitzt eine Einbettung in die Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S_{2d} = \mathrm{Sym}(\{\pm 1, \ldots, \pm d\})$, die definiert ist durch

$$W_{2,d} := \big\{\sigma \in S_{2d} \;\big|\; \forall i \in \{1, \ldots, d\} \exists j \in \{1, \ldots, d\} \colon \sigma(\{\pm i\}) = (\{\pm j\})\big\}.$$

   (c) Es gilt $|G| \leqslant 2^d d!$.

(d) Im Fall $2d \leqslant 8$ ist G auflösbar.

*6. In der Vorlesung wurde der Hauptsatz der Galoistheorie unter Verwendung des Satzes vom primitiven Element bewiesen. Man kann auch umgekehrt vorgehen, wenn man den Hauptsatz der Galoistheorie anders beweist, wie zum Beispiel in Miles Reids Vorlesungsnotizen, Abschnitt 4.3
`http://homepages.warwick.ac.uk/~masda/MA3D5/Galois.pdf`

Dann zeigt man wie in der Vorlesung, dass jede endliche separable Erweiterung nur endlich viele Zwischenkörper hat.

Folgere daraus direkt den Satz vom primitiven Element für jede endliche separable Erweiterung von unendlichen Körpern. (Hinweis: Zeige, dass ein Vektorraum über einem unendlichen Körper keine Vereinigung endlich vieler echter Unterräume sein kann.)