D-MATH Algebra II FS 2016
Prof. Richard Pink

Serie 25

Symmetrische Funktionen, Resultante

1. Schreibe die folgenden Ausdrücke in $X_1, \ldots, X_n$ in Termen der elementarsymmetrischen Polynome:
   (a) $\sum_{i\neq j} X_i^3 X_j$.
   (b) $\sum_i X_i^4$.
   (c) $\sum_{i\neq j\neq k\neq i} X_i^2 X_j^2 X_k^2$.
   (d) $\sum_{i\neq j} X_i/X_j$.

2. Seien $S_1 = X + Y + Z$ und $S_2 = XY + XZ + YZ$ und $S_3 = XYZ$ die elementarsymmetrischen Polynome in drei Variablen. Für alle $n \geqslant 1$ definiere $F_n := X^n + Y^n + Z^n$. Zeige, dass für $n \geqslant 4$ die folgende Rekursionsformel gilt:
$$F_n = S_1F_{n-1} - S_2F_{n-2} + S_3F_{n-3},$$
und berechne F_n für alle $n = 1, \ldots, 5$.

3. Betrachte einen Körper K und eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Variable über K, und seien $S_1, \ldots, S_n$ ihre elementarsymmetrischen Polynome.
   (a) Zeige: Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist $K(X_1, \ldots, X_n)^{A_n} = K(S_1, \ldots, S_n, E)$ für $E := \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i - X_j)$.
   (b) Bestimme $K(X_1, \ldots, X_n)^{A_n}$ im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$.

Für die restlichen Aufgaben dürfen und sollen alle Formeln aus §6.4 der Zusammenfassung benutzt werden:

4. Bestimme die Resultante folgender ganzzahliger Polynome bis aufs Vorzeichen:
   (a) $X^3 - X + 1$ und $X^2 + X + 3$.
   (b) $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1$ und $X^{m-1} + X^{m-2} \cdots + 1$ für teilerfremde n und m.

   Für welche p haben sie gemeinsame Nullstellen in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p?

**5. Betrachte den Polynomring $R := \mathbb{Z}[A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m]$ und eine weitere Variable X. Betrachte die Polynome $F(X) = \sum_{i=0}^m A_iX^i$ und $G(X) = \sum_{j=0}^n B_jX^j$ in $R[X]$, und sei $H \in R$ deren Resultante bezüglich X. Zeige, dass H ein irreduzibles Element von R ist.