Serie 26

Diskriminante, Zwischenkörper

1. Beweise die Formel für die Vandermonde-Determinante mit der Methode, mit der in der Vorlesung die Formel für die Resultante in Termen der Nullstellen der beteiligten Polynome bewiesen wurde.

   Erinnerung aus der Linearen Algebra: Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien $a_1, \ldots, a_n \in R$ beliebig. Dann hat die Matrix $A = (a_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ die *Vandermonde-Determinante* $\det(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)$.

2. Sei R ein Ring, und betrachte das Polynom $f(X) = X^m + aX + b \in R[X]$ mit $m \geqslant 2$. Verifiziere die folgende Formel für die Diskriminante von f:

$$\mathrm{Disc}_f = (-1)^{m(m-1)/2}[(1-m)^{m-1}a^m + m^m b^{m-1}].$$

3. Bestimme für jedes der folgenden ganzzahligen Polynome f, ob es separabel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, sowie für welche Primzahlen $f \bmod (p)$ separabel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.

   (a) $f(X) = X^5 + 5X + 5$,

   (b) $f(X) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$.

   (c) $f(X) = X^5 + 2X^3 + 4$,

   Wie geht es schneller: mit der Diskriminante oder durch Berechnung des grössten gemeinsamen Teilers des Polynoms f und seiner Ableitung f' ?

4. Sei $\underline{X} := (X_1, X_2, X_3, X_4)$ ein Satz unabhängiger Variablen über einem Körper K, und sei $\underline{S} := (S_1, S_2, S_3, S_4)$ mit den zugehörigen elementarsymmetrischen Polynomen.

   (a) Bestimme ein primitives Element der Erweiterung $K(\underline{X})/K(\underline{S})$.

   (b) Sei $\Delta := \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \triangleleft S_4$ die Kleinsche Vierergruppe. Bestimme $K(\underline{X})^\Delta$ durch explizite Erzeugende über $K(\underline{S})$.

5. Sei $n \geqslant 3$ und sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ ist.