Serie 28

Auflösbare Körpererweiterungen

1. Sei $p > 11$ eine Primzahl. Zeige, dass die Gleichung $X^5 - pX + p = 0$ über $\mathbb{Q}$ nicht durch Radikale auflösbar ist.

2. Seien $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Zeige, dass jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $n \leqslant 9$ mit der Eigenschaft $f(X) = \varepsilon X^n f(\delta X^{-1})$ auflösbar durch Radikale ist. (Vergleiche Serie 24 Aufgabe 5.)

3. Sei $f(X)$ ein normiertes Polynom vom Grad 3 in einer Variablen mit reellen Koeffizienten ohne mehrfache Nullstellen, und sei Δ seine Diskriminante. Zeige:

   (a) Es gilt $\Delta > 0$, falls alle Nullstellen von f reell sind, andernfalls $\Delta < 0$.

   (b) Falls f genau eine reelle Nullstelle hat, so enthält die Lösungsformel dafür nur reelle Quadrat- und dritte Wurzeln.

   (c) Im Gegensatz dazu erfordert die Lösungsformel ausgerechnet dann eine dritte Wurzel aus einer nicht-reellen komplexen Zahl, wenn f drei reelle Nullstellen hat (*"Casus irreducibilis"*).

   *(d) Versuche zu erklären, wieso der Umstand aus (c) unvermeidbar ist, also weshalb die Nullstellen von f, selbst wenn sie reell sind, im Allgemeinen nicht mit reellen Radikalen ausgedrückt werden können.