Transzendenz von e und π

Pink
Algebra II
FS 2016

①

	irrational	transzendent
e	Euler 1737	Hermite 1873
π	Lambert 1761	Lindemann 1882

---

② **Satz**: e ist irrational.

Beweis (Fourier) Erinnerung: $e := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = 2.71828\ldots$

Annahme: $e = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$. Dann ist

$$\underbrace{e \cdot n!}_{\substack{\| \\ m\cdot(n-1)! \\ \cap \\ \mathbb{Z}}} = \underbrace{\sum_{0\leq k\leq n} \underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\substack{\cap \\ \mathbb{Z}}}}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\sum_{k>n} \frac{n!}{k!}}_{\substack{\| \\ J \,\in\, \mathbb{R}}}$$

Also ist $J \in \mathbb{Z}$. Ausserdem ist offenbar $J > 0$; Weiter ist

$$J = \sum_{k>n} \frac{1}{(n+1)\cdots k} \underset{\text{sogar } <}{\leq} \sum_{k>n} \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

$$= \sum_{\ell>0} \frac{1}{(n+1)^\ell} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n} \leq 1$$

Also ist $J \in \mathbb{Z}$ und $0 < J < 1 \Rightarrow$ Widerspruch. qed.

---

③ Alle Transzendenzbeweise funktionieren so:

- durch Widerspruch
- durch Konstruktion einer Hilfsgrösse J
- Zeige speziell: $\left.\begin{array}{l} J \in \mathbb{Z} \\ |J| > 0 \\ |J| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Widerspruch.

Die verschiedenen Beweisteile erfordern subtiles Ineinandergreifen von
- Algebra : Manipulation von Polynomen
- Analysis : Abschätzungen (Integrale, Grenzwerte)
- Arithmetik : Teilbarkeit.

Wieso Polynome?
- weil sie in der Definition von algebraischen Zahlen auftreten
- als technisches Hilfsmittel zur Konstruktion von J.

Speziell brauchen wir die folgenden Grundeigenschaften.

---

(4) Arithmetik: __Lemma 1__: $\forall f \in \mathbb{Z}[X]\ \forall j \geq 0 : f^{(j)} \in j!\,\mathbb{Z}[X]$.

__Beweis__: $f(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \Rightarrow f^{(j)} = \sum_{k \geq 0} a_k \cdot k(k-1)\cdots(k-j+1) X^{k-j}$

$$= \sum_{k\geq 0} a_k \cdot \binom{k}{j} \cdot j!\, X^{k-j} \quad \text{qed}$$

(5) Algebra: __Lemma 2__: Für jedes Polynom der Form $f(X) = (X-a)^q \cdot g(X)$ und jedes $j \geq 0$ gilt
$$f^{(j)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < q \\ q!\, g(a) & \text{falls } j = q \end{cases}.$$

__Beweis__: Nach der Variablentransformation $X - a = Y$ ist oBdA $a = 0$. Schreibe dann $f(X) = \sum_{k\geq 0} b_k X^{k+q}$ und $g(X) = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$
$\Rightarrow f^{(j)}(0) = 0$ für $j < q$ und $f^{(q)}(0) = q!\, b_0 = q!\, g(0)$ qed.

(6) __Def.__: Für jedes $f \in \mathbb{C}[X]$ und $z \in \mathbb{C}$ setze
$$I_f(z) := \int_0^z e^{z-w} f(w)\, dw.$$
Als Pfadintegral einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion ist dies wohldefiniert. Man kann es zum Beispiel explizit schreiben als
$$\int_0^1 e^{z(1-t)} f(zt) \cdot z\, dt.$$

Analysis

7 **Lemma 3**: $I_f(z) = \sum_{j\geq 0}' \left(e^z f^{(j)}(0) - f^{(j)}(z) \right)$ ← endliche Summe.

Beweis: $I_f(z) = \int_0^z \underbrace{e^{z-w}}_{\uparrow} \underbrace{f(w)}_{\downarrow} dt$ Partielle Integration

$= -e^{z-w} f(w) \Big|_{w=0}^{w=z} - \int_0^z -e^{z-w} f'(w)\, dz$

$= -f(z) + e^z f(0) + I_{f'}(z)$.

Induktion $\Rightarrow \forall k \geq 0$:

$$I_f(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(e^z f^{(j)}(0) - f^{(j)}(z) \right) + I_{f^{(k)}}(z).$$

Für alle $k > \deg(f)$ ist $f^{(k)} = 0 \Rightarrow I_{f^{(k)}}(z) = 0$.   qed.

8 **Lemma 4**: Zu $f(X) = \sum' a_j X^j \in \mathbb{C}[X]$

assoziiere $\varphi(X) := \sum |a_j| \cdot X^j \in \mathbb{R}[X]$.

Dann gilt $|I_f(z)| \leq e^{|z|} \cdot \varphi(|z|)$.

Beweis: Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \leq |z|$ gilt

$|f(w)| \leq \varphi(|w|) \leq \varphi(|z|)$.

Also $|I_f(z)| \leq \int_0^z |e^{z-w} f(w)\, dw|$

{bei Integration entlang $[0,w]$} $\leq \int_0^z |e^{z-w}| \cdot \varphi(|z|) \cdot |dw|$

$\leq \underbrace{\int_0^{|z|} e^{|z|-t} dt}_{= (e^{|z|}-1)} \cdot \varphi(|z|)$

$(e^{|z|}-1) \leq e^{|z|}$.   qed.

(9) Jetzt beweisen wir <u>Satz:</u> $\boxed{\text{e ist transzendent}}$

<u>Annahme:</u> e sei algebraisch. Wähle $b_k \in \mathbb{Z}$, nicht alle gleich Null, mit $\sum_{0 \le k \le n} b_k e^k = 0$.
Wegen $e \neq 0$ können wir solche mit $b_0, b_n \neq 0$ wählen.

(10) Für eine noch zu wählende Primzahl p betrachten wir das <u>Hilfspolynom</u>

$$f_p(X) := X^{p-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} (X-k)^p .$$

Später werden wir $p \gg$ nehmen, aber erst lassen wir p beliebig während wir die nötigen Bedingungen aufsammeln.

(11) Die wichtigsten Eigenschaften von f_p sind:

(a) $f_p(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

(b) f_p hat Nullstellen von hohem Grad in $0, 1, \ldots, n$

(c) f_p hat kleinstmöglichen Grad angesichts (b).

Das Wechselspiel dieser Eigenschaften ist entscheidend für das Gelingen des Beweises.

(12) <u>Beh.</u>: $\forall j \geq 0 \ \forall 0 \le k \le n$:

$$f_p^{(j)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < p \wedge k \geq 1 \\ 0 & \text{falls } j < p-1 \wedge k = 0 \\ (p-1)! \cdot (\pm n!)^p & \text{falls } (j,k) = (p-1, 0) \\ \in p!\,\mathbb{Z} & \text{falls } j \geq p \end{cases}$$

<u>Beweis</u>: Aus der Definition f_p und <u>Lemma 2</u> folgen die ersten beiden Fälle sowie der dritte mittels der Rechnung

$$f_p^{(p-1)}(0) = (p-1)! \cdot \prod_{k=1}^{n} (0-k)^p = (p-1)! \cdot (\pm n!)^p .$$

Der letzte Fall folgt aus $f_p \in \mathbb{Z}[X]$ und <u>Lemma 1</u>. <u>qed</u>.

(13) Die entscheidende Hilfsgröße ist jetzt

$$J_p := \frac{1}{(p-1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot I_{f_p}(k).$$

(14) <u>Beh.</u>: $J_p \in \mathbb{Z}$ und

$J_p \notin p\mathbb{Z}$ falls $p > n$ und $p \nmid b_0$.

<u>Beweis</u>: Nach Lemma 3 ist

$$J_p = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot {\sum_{j\geq 0}}' \left(e^k f_p^{(j)}(0) - f_p^{(j)}(k)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} b_k e^k\right)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{nach Annahme}}} \left({\sum_{j\geq 0}}' \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(j)}(0)\right) - \sum_{k=0}^{n} {\sum_{j\geq 0}}' b_k \cdot \underbrace{\frac{1}{(p-1)!} \cdot f_p^{(j)}(k)}_{(12)}$$

$$= -b_0 \cdot \underbrace{\frac{f_p^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}}_{\substack{\parallel \\ (\pm n!)^p}} - \sum_{k=0}^{n} {\sum_{j\geq p}}' \underbrace{b_k}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{f_p^{(j)}(k)}{(p-1)!}}_{\in p\mathbb{Z}}$$

$$\in -b_0 \cdot (\pm n!)^p + p\mathbb{Z}.$$ qed.

(15) <u>Beh.</u>: $|J_p| \leq \dfrac{c d^p}{(p-1)!}$ für $c, d > 0$ unabhängig von p.

<u>Beweis</u>: $|J_p| \leq \dfrac{1}{(p-1)!} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |b_k| \cdot |I_{f_p}(k)|$; nach Lemma 4

ist dies $\leq \dfrac{1}{(p-1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |b_k| \cdot e^k \cdot \varphi_p(k)$ wobei

$\varphi_p(X) = X^{p-1}(X+1)^p \cdots (X+n)^p$ ist. Also ist

$\varphi_p(k) \leq \varphi_p(n) = n^{p-1}(n+1)^p \cdots (2n)^p \leq ((2n)!)^p$

$$\Longrightarrow |J_p| \leq \frac{1}{(p-1)!} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |b_k| \cdot e^k}_{c} \cdot \underbrace{((2n)!)}_{d}{}^p$$ qed.

6)

(16) <u>Ende des Beweises</u>: Nach der Stirling Formel ist

$$\frac{cd^p}{(p-1)!} = \frac{p\,c\,d^p}{p!} \sim \frac{p\,c\,d^p}{\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt{2\pi p}} = \left(\frac{ed}{p}\right)^p \cdot \frac{\sqrt{p}\cdot c}{\sqrt{2\pi}} \longrightarrow 0$$

für $p \longrightarrow \infty$.

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, können wir $p > n$ mit $p \nmid b_0$ prim wählen mit $\frac{cd^p}{(p-1)!} < 1$. Dann ist

$$\left.\begin{array}{l} (14) \Longrightarrow J_p \in \mathbb{Z} \\ (14) \Longrightarrow |J_p| \geq 1 \\ (15) \Longrightarrow |J_p| < 1 \end{array}\right\} \text{Widerspruch!}$$

<u>qed</u> (Satz).

---

(17) Jetzt beweisen wir <u>Satz</u>: $\boxed{\pi \text{ ist transzendent.}}$

(18) <u>Äquivalent</u>: πi ist transzendent.

<u>Beweis</u>: Betrachte diese Körpererweiterungen:
Wäre eines von $\mathbb{Q}(\pi)$ oder $\mathbb{Q}(\pi i)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, so auch $\mathbb{Q}(\pi, i)$, also auch das andere. <u>qed</u>.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \mathbb{Q}(\pi, i) \arrow[d, dash, "\leq 2"] & = & \mathbb{Q}(\pi i, i) \arrow[d, dash, "\leq 2"] \\ \mathbb{Q}(\pi) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(\pi i) \arrow[dl, dash] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

(19) Allgemeiner bewies Lindemann 1882 auch

<u>Satz</u>: Für jedes $\vartheta \in \mathbb{C}^*$ ist ϑ oder e^ϑ transzendent.

Daraus folgt (18), denn nach der <u>Eulerformel</u> $e^{\pi i} + 1 = 0$ ist $e^{\pi i} = -1$ algebraisch, also πi dann transzendent.

Der Beweis der Verallgemeinerung ist in etwa der gleiche wie im Spezialfall $\vartheta = \pi i$, aber technisch aufwendiger.

(20) Annahme: πi sei algebraisch.

Sei $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$, also irreduzibel normiert mit $g(\pi i) = 0$. Schreibe
$$g(X) = \prod_{j=1}^{d} (X - \vartheta_j) \quad \text{mit allen } \vartheta_j \in \mathbb{C} \text{ und } \vartheta_1 = \pi i .$$

(21) Wegen $1 + e^{\pi i} = 0$ ist dann
$$0 = \prod_{j=1}^{d} (1 + e^{\vartheta_j}) = \sum_{S \subset \{1,..,d\}} e^{\vartheta_S} \quad \text{mit } \vartheta_S := \sum_{j \in S} \vartheta_j .$$
Sei q die Anzahl der $S \subset \{1,..,d\}$ mit $\vartheta_S = 0$.
Wegen $\vartheta_\emptyset = 0$ ist $q \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$.
Nenne die übrigen ϑ_S unter Beibehaltung ihrer Vielfachheiten um in $\eta_1, .., \eta_n$ für $n := 2^d - q$. Dann ist
$$0 = q + \sum_{k=1}^{n} e^{\eta_k} .$$
Mit dieser Gleichung arbeiten wir weiter wie mit der in (9).

(22) Setze $h(X) := \prod_{k=1}^{n} (X - \eta_k) \in \mathbb{C}[X]$.

Dann ist $X^q \cdot h(X) = \prod_{S \subset \{1,..,d\}} (X - \vartheta_S)$ symmetrisch in $\vartheta_1, .., \vartheta_d$,

also hat Koeffizienten Polynome in den Koeffizienten von g, liegt also in $\mathbb{Q}[X]$.
Wähle $b \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ mit $b \cdot h(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

(23) Für p prim betrachte das Hilfspolynom
$$f_p(X) := X^{p-1} \cdot \left(b^n h(X) \right)^p .$$
Dies liegt also in $\mathbb{Z}[X]$.

8)

(24) **Beh.:** Für alle $j \geq 0$ gilt

$$f_p^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < p-1 \\ (p-1)!\, a^p & \text{falls } j = p-1 \\ \in p!\,\mathbb{Z} & \text{falls } j \geq p \end{cases}$$

wobei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ unabhängig von p ist.

Beweis: Aus Lemma 2 folgt der erste Fall sowie

$$f_p^{(p-1)}(0) = \underbrace{(b^n h(0))}_{=a \in \mathbb{Z}}{}^p \cdot (p-1)! = (p-1)! \cdot \Big(\underbrace{b^n \cdot \prod_{k=1}^n (-\eta_k)}_{\neq 0}\Big)^p$$

da alle $\eta_k \neq 0$ und $b \neq 0$ ist.

Aus Lemma 1 folgt der Fall dritte. qed.

(25) **Beh.:** Für alle $j \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^n f_p^{(j)}(\eta_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < p \\ \in p!\,\mathbb{Z} & \text{falls } j \geq p. \end{cases}$$

Beweis: Der erste Fall folgt wieder aus Lemma 2. Der zweite erfordert Zusatzarbeit, weil die η_k im Allgemeinen nicht in $\mathbb{Q}$ sind.

Schreibe $h(X) = \sum_{0 \leq k \leq n} h_k X^{n-k}$. Dann ist $\pm h_k$ der Wert des k-ten elementarsymmetrischen Polynoms an der Stelle $\eta_1, \dots, \eta_n$, und es liegt in $b^{-1}\mathbb{Z}$. Also folgt:

(*) Jedes symmetrische Polynom vom Grad ℓ in $\eta_1, \dots, \eta_k$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ ist ein Polynom in $h_1, \dots, h_n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ vom Totalgrad $\leq \ell$, liegt also in $b^{-\ell}\mathbb{Z}$.

Schreibe nun

$$h(X)^p = \prod_{k=1}^n (X - \eta_k)^p = \sum_{0 \leq \ell \leq np} h_{p,\ell} \cdot X^{np-\ell}.$$

Aus (*) folgt dann $h_{p,\ell} \in b^{-\ell}\mathbb{Z}$.

Weiter rechnen wir

$$f_p(X) = X^{p-1}\left(b^n h(X)\right)^p = \sum_{0\le l\le np} b^{np} h_{p,l}\, X^{np-l+p-1}$$

$$\Rightarrow f_p^{(j)}(X) = \sum_{0\le l\le np} b^{np} h_{p,l} \cdot \binom{np-l+p-1}{j} \cdot j! \cdot X^{np-l+p-1-j}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_p^{(j)}(\eta_k) = j! \cdot \sum_{0\le l\le np} \underbrace{\binom{np-l+p-1}{j}}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\underbrace{b^{np} h_{p,l}}_{\in b^{-l}\mathbb{Z}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{np-l+p-1-j}}_{\in b^{-(np-l+p-1-j)}\mathbb{Z}\ (*)}}_{\in b^{np-l-(np-l+p-1-j)}\mathbb{Z} \,=\, b^{j-(p-1)}\mathbb{Z}}.$$

Für $j \ge p$ ist dies $\subset \mathbb{Z}$.

Insgesamt ist also die rechte Seite in $j!\,\mathbb{Z} \subset p!\,\mathbb{Z}$. qed.

(26) Die entscheidende Hilfsgröße ist jetzt

$$J_p := \frac{1}{(p-1)!} \cdot \sum_{k=1}^{n} I_{f_p}(\eta_k).$$

(27) Beh.: $J_p \in \mathbb{Z}$ und

$J_p \notin p\mathbb{Z}$ falls $p \nmid aq$.

Beweis: Nach Lemma (3) ist

$$J_p = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\ge 0}{}' \left(e^{\eta_k} \cdot f_p^{(j)}(0) - f_p^{(j)}(\eta_k)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\eta_k}\right)}_{\overset{(21)}{=}\, -q} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j\ge 0}{}' \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(j)}(0)\right)}_{\text{siehe (24)},\ \in a^p + p\mathbb{Z}} - \sum_{j\ge 0} \underbrace{\left(\frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} f_p^{(j)}(\eta_k)\right)}_{\text{siehe (25)}\ \Rightarrow\ \in p\mathbb{Z}}$$

$$\in -q \cdot a^p + p\mathbb{Z}.$$

qed.

(28) <u>Beh.</u>: $|J_p| \le \frac{c\,d^p}{(p-1)!}$ für $c,d>0$ unabhängig von p.

<u>Bew.</u>: $|J_p| \le \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=1}^{n} |I_{f_p}(z_k)| \le \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=1}^{n} e^{|z_k|}\,\varphi_p(|z_k|)$,

nach Lemma 4, wobei φ_p das dort zu f_p assoziierte Polynom ist. Nach der Definition von f_p gilt für alle $t\in\mathbb{R}^{>0}$:

$$\varphi_p(t) \le t^{p-1}\cdot\left(b^n\cdot\prod_{k=1}^{n}(t+|z_k|)\right)^p$$
$$= \frac{1}{t}\cdot\left(t\,b^n\prod_{k=1}^{n}(t+|z_k|)\right)^p.$$

Da t nur die endlich vielen Werte $|z_k|$ durchläuft, folgt

$\varphi_p(|z_k|) \le \frac{1}{|z_k|}\cdot d^p$ für $d = \max\left\{|z_k|\,b^n\prod_{l=1}^{n}(|z_k|+|z_l|)\right\}_{1\le k\le n}$

unabhängig von p.

Somit ist $|J_p| \le \frac{1}{(p-1)!}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{|z_k|}}{|z_k|}}_{=:c}\cdot d^p$ <u>qed</u>.

(29) <u>Ende des Beweises</u>: Für $p\to\infty$ liefern (27) u. (28) einen Widerspruch genauso wie in (16). <u>qed</u>.