Summen, Indices und Multiindices

1 Einleitung

Möchten wir zwei Zahlen a und b addieren, so schreiben wir für gewöhnlich

$$a + b.$$

Genauso schreiben wir

$$a + b + c,$$

für die Summe von drei Zahlen a, b und c. Im letzten Ausdruck müssen wir keine Klammern setzen, da die Addition *assoziativ* ist. Wegen der *Kommutativität* ist auch die Reihenfolge in diesem Ausdruck nicht relevant. In gewissem Sinne ist die Addition also nicht nur eine Operation zwischen zwei Zahlen sondern auch eine Operation, die als Eingabe eine *Multimenge*[1] von Zahlen bekommt und die Summe über alle diese Zahlen bildet. Wir erläutern dieses Konzept an einem Beispiel.

Beispiel:

$$\text{„Summe der Zahlen } 2, 8, 9, 9\text{“} = \sum\{2, 8, 9, 9\} = 2 + 8 + 9 + 9 = 28$$

Das Symbol $\sum$ steht hier für die Summe.

2 Die Indexnotation

Obige Schreibweise ist allerdings unüblich. Typischerweise sind die Zahlen, die wir addieren wollen durch eine andere Menge *indiziert*. Das selbe Beispiel mit Indexnotation sieht dann so aus.

Beispiel:

$$\begin{aligned} a_1 &:= 2 \\ a_2 &:= 8 \\ a_3 &:= 9 \\ a_4 &:= 9 \end{aligned}$$

[1] Eine Multimenge ist ähnlich zu einer Menge. Im Gegensatz zu einer Menge darf aber ein Element nicht maximal einmal sondern öfters darin vorkommen.

und

$$
\begin{aligned}
\text{„Summe der Zahlen } a_1, a_2, a_3, a_4\text{“} &= \sum_{i \in \{1,2,3,4\}} a_i \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&= 2 + 8 + 9 + 9 \\
&= 28
\end{aligned}
$$

Die *Hilfsvariable* i nimmt also die verschiedenen Werte in der *Indexmenge* $\{1, 2, 3, 4\}$ an, zu jedem dieser Werte gibt es eine zugehörige Zahl a_i und diese Zahlen sind es, die addiert werden.

Der Fall der Indizierung mit aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist so häufig, dass er meist abgekürzt wird.

Beispiel:

$$\sum_{i \in \{1,2,3,4\}} a_i = \sum_{i=1}^{4} a_i.$$

Manchmal schreibt man auch etwas inexakt

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + \cdots + a_4.$$

Bis jetzt wirkt das Indizieren vielleicht etwas umständlich. Nachfolgend sind zwei typischere Beispiele.

Beispiel: Sei

$$a_i := \text{„Anzahl der Buchstaben im Wort für die Zahl } i\text{“},$$

also etwa

$$a_{15} = \text{„Anzahl der Buchstaben in 'fünfzehn'“} = 8.$$

Dann ist

$$\sum_{i=9}^{20} a_i = 4 + 4 + 3 + 5 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 7 = 79.$$

Beispiel:

$$\sum_{i=2}^{4} i^2 = 4 + 9 + 16 = 29$$

Wir sehen, dass es reicht, wenn wir die zu addierenden Zahlen implizit definieren.

Die Summe über die leere Menge ist als 0, das *neutrale Element* der Addition, definiert,

$$\sum \emptyset = 0.$$

In Indexnotation kann dies manchmal verwirrend aussehen.

Beispiel:

$$\sum_{i \in \emptyset} (1 + i^2) = 0$$

Beispiel:

$$\sum_{i=3}^{2} (1 + i^2) = 0$$

Ist der obere Index kleiner als der untere Index, interpretieren wir die Indexmenge als leer.

Weitere Beispiele mit Erklärungen.

Beispiel:

$$\sum_{i=2}^{4} i^2 = \sum_{j=2}^{4} j^2 = \sum_{\heartsuit=2}^{4} \heartsuit^2$$

Das Symbol für die Hilfsvariable beim Indizieren ist egal. Von ausserhalb der Summe betrachtet ist die Hilfsvariable quasi unsichtbar.

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{5} 2 = 10$$

Die Hilfsvariable kann auch (scheinbar) gar nicht vorkommen.

Beispiel: Es gilt

$$\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

für jede natürliche Zahl n. Die Anzahl der Zahlen, die wir summieren, kann also auch variabel sein. In diesem Beispiel werden für jedes n auch genau n viele Zahlen aufsummiert.

Im Allgemeinen ist die Indexmenge eine beliebige endliche Menge I und jedem $i \in I$ ist auf irgendeine Art und Weise eine Zahl a_i zugeordnet. Formal handelt es sich also um eine Funktion $a\colon I \to \mathbb{R}$. Wir könnten auch $a(i)$ schreiben, traditionell wird aber meist a_i bevorzugt. Der Ausdruck für eine Summe sieht also im Allgemeinen so aus:

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum\{a_i : i \in I\}.$$

Man beachte wieder, dass auf der rechten Seite die Summe einer Multimenge gebildet wird. Wir müssen also für jedes $i \in I$ die Zahl a_i bestimmen und alle diese Zahlen addieren (wobei Zahlen natürlich mehr als einmal auftreten dürfen).

Algorithmisch gedacht würden wir etwa so vorgehen: Ist die Menge I leer, dann ist das Ergebnis der Summe 0. Ist die Menge I nicht leer, dann wählen wir ein beliebiges Element aus I aus, sagen wir i_0, und benutzen die rekursive Formel

$$\sum_{i\in I} a_i = a_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} a_i.$$

Da I endlich ist, terminiert der Algorithmus. Diese Vorgangsweise ist im Wesentlichen sogar die formale Definition des Summenausdrucks.

Das Verwenden einer Indexmenge ist keine Einschränkung, wir gehen darauf aber nicht näher ein. Da ausserdem, wie bereits erwähnt, die Multimengennotation unüblich ist, werden wir sie nicht weiter verwenden.

Es folgen einige Beispiele mit etwas komplizierteren Indexmengen.

Beispiel:

$$\sum_{i\in\{0,\frac{2}{3},1\}} i^2 = 0 + \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9}$$

Beispiel: Sei I die Menge aller geraden ganzen Zahlen zwischen 1 und 10, dann ist

$$\sum_{i\in I} i = \sum_{\substack{i=1\\ i \text{ gerade}}}^{10} i = 2+4+6+8+10 = 30.$$

Die zweite Summe ist also so zu verstehen, dass i diejenigen Werte zwischen 1 und 10 annimmt, welche die Bedingung „i gerade“ erfüllen.

Beispiel:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{4} a_i = \sum_{i\in\{1,3,4\}} a_i$$

Folgende Substitutionsregel ist oft hilfreich. Seien I und J endliche Mengen und $v\colon J \to I$ eine bijektive Funktion. Es gilt

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{v(j)}.$$

Beispiel: Sei n eine natürliche Zahl und definiere $v\colon \{2,\ldots,n+1\} \to \{1,\ldots,n\}$ durch

$$v(j) = j - 1.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}.$$

Dieser spezielle Vorgang wird *Indexverschiebung* genannt.

3 Multiindices

Ist die Indexmenge ein kartesisches Produkt oder eine Teilmenge davon, so spricht man von *Multiindices*. Da dieser spezielle Fall häufig ist, sind dafür verschiedene Schreibweisen gebräuchlich.

Beispiel:

$$\sum_{k\in I\times J} a_k = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{(i,j)} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_{i,j} = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_{ij}$$

Beim letzten Ausdruck besteht die Gefahr der Verwechslung mit $a_{i\cdot j}$. Hier muss immer auf den Kontext geachtet werden. Ähnliches gilt etwa für a_{15}. Dies kann entweder „a Index fünfzehn“ oder „a Index 1 und 5“ heissen.

Eine solche Summe lässt sich immer als Verkettung von Summationen schreiben.

Beispiel:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j}$$

Beachte, dass der Wert der inneren Summe von i abhängt. Genauso gilt

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Man spricht hierbei von einer *Doppelsumme* oder allgemeiner von einer *Mehrfachsumme*.

Beispiel: Sei K eine Teilmenge von $I \times J$. Es gilt

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} a_{i,j},$$

wobei $J_i := \{j \in J : (i,j) \in K\}$.

Sind die einzelnen Indexmengen aufeinander folgende ganze Zahlen, schreibt man gerne wie in folgenden Beispielen.

Beispiel:

$$\sum_{(i,j,k)\in\{1,\ldots,n_1\}\times\{1,\ldots,n_2\}\times\{1,\ldots,n_3\}} a_{i,j,k} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n_1\\ j=1,\ldots,n_2\\ k=1,\ldots,n_3}} a_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3} a_{i,j,k}$$

Beispiel:

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n\\ i\leq j}} a_{i,j} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\leq j}}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

Man beachte, dass im letzten Ausdruck die innere Summation bei i startet.

4 Andere binäre Operationen

Alles bisher gesagte gilt nicht nur für die Addition, sondern sinngemäss auch für viele andere binäre Operationen. Es ist dabei auch nicht von wesentlicher Bedeutung auf welche Elemente diese Operationen wirken.

Operation	kleines Symbol	grosses Symbol
Addition	$+$	$\sum$
Produkt	$\cdot$	$\prod$
Vereinigung	$\cup$	$\bigcup$
Schnitt	$\cap$	$\bigcap$
kartesisches Produkt	$\times$	$\bigtimes$ oder $\prod$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wir schliessen mit einem etwas längeren Beispiel.

Beispiel: Gegeben $M_1, \ldots, M_n \subseteq \mathbb{R}$. Angenommen jede dieser Mengen ist eine Vereinigung endlich vieler Mengen, also

$$M_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} T_{i,j}$$

für Mengen $T_{i,j} \subseteq \mathbb{R}$ und natürliche Zahlen k_i. Die Menge M_i entsteht also als Vereinigung von k_i vielen Teilmengen.

Für drei Mengen A, B, C gilt

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Das kartesische Produkt $\times$ verhält sich also distributiv bezüglich der Vereinigung $\cup$.

Für das kartesische Produkt der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n &= \bigcup_{j_1=1}^{k_1} (T_{1,j_1} \times M_2 \times \cdots \times M_n) \\ &= \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \bigcup_{j_2=1}^{k_2} \ldots \bigcup_{j_n=1}^{k_n} (T_{1,j_1} \times T_{2,j_2} \times \cdots \times T_{n,j_n}) \\ &= \bigcup_{\substack{j_1=1,\ldots,k_1 \\ j_2=1,\ldots,k_2 \\ \vdots \\ j_n=1,\ldots,k_n}} (T_{1,j_1} \times T_{2,j_2} \times \cdots \times T_{n,j_n}) \,. \end{aligned}$$

Etwas exakter könnten wir auch schreiben

$$\bigtimes_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{j \in J} \bigtimes_{i=1}^{n} T_{i,j_i}$$

wobei

$$J := \bigtimes_{i=1}^{n} \{1, \ldots, k_i\}.$$

Was als einfacher zu lesen empfunden wird, ist von Person zu Person verschieden.

Zuletzt noch eine Bemerkung zur oben gewählten Notation. Oft verwendet man für die Teilmengen das gleiche Symbol wie für die Vereinigung. In diesem Fall also

$$M_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} M_{i,j}.$$

Formal gesehen erzeugt dies einen Notationskonflikt, da einerseits $M\colon \{1,\ldots,n\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und andererseits $M\colon \bigcup_{i=1}^{n}\{i\} \times \{1,\ldots,k_i\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$. In der Praxis entsteht daraus aber selten ein Problem.