Der Satz von Fubini

Einleitung

Unser Ziel hier ist eine Intuition für mehrdimensionale Integrale und das Vertauschen von iterierten Integralen zu entwickeln. Dabei wollen wir nicht auf alle technischen Voraussetzungen und Details eingehen, sondern überlassen dies der *Mass- und Integraltheorie*.

Gegeben sei eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$. Wir nehmen im Folgenden immer a priori an, dass G Lebesgue-messbar und f Lebesgue-integrierbar über G ist. Diese Begriffe sind ähnlich zu Jordan-messbar und Riemann-integrierbar, aber es gibt diffizile Unterschiede. In den "meisten" Fällen stimmen die jeweilige Begriffe allerdings überein.

Auch alle folgenden Integrale sind im Sinne von Lebesgue zu verstehen. Wieder gilt aber, dass dies in den "meisten" Fällen mit dem Riemann-Integral übereinstimmt. Die genauen Zusammenhänge werden erst in der *Mass- und Integraltheorie* besprochen.

Volumina

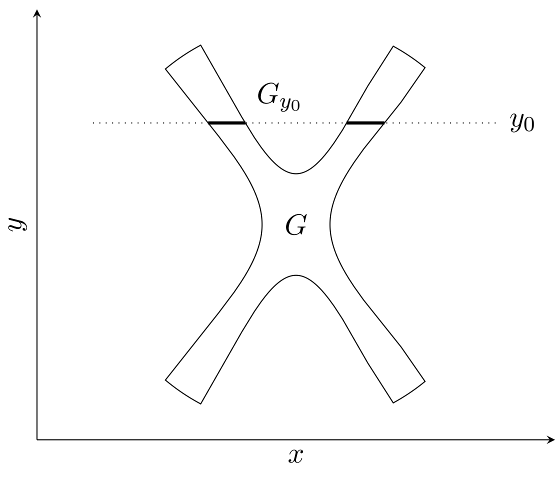
Es gilt die Merkregel *„Volumen = Integral von Schnittflächen"*. Formal heisst das,

$$\mathrm{vol_n}(G) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol_{n-1}}(G_{x_n})\ dx_n.$$

Hier bezeichnet $\mathrm{vol_n}$ (bzw. $\mathrm{vol_{n-1}}$) das n-dimensionale (bzw. $(n-1)$-dimensionale) Volumen und

$$G_{x_n} := \left\{ x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', x_n) \in G \right\}$$

den Schnitt von G entlang der Koordinate x_n. Analoges gilt für Schnitte entlang der anderen Koordinaten.



Beispiel: Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Um das Volumen von G zu berechnen wollen wir zunächst den Schnitt von G entlang der Koordinate y bestimmen. In diesem Fall bedeutet dies nichts Anderes als die Ungleichung

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

für festes aber beliebiges $y \in \mathbb{R}$ zu lösen. Der Schnitt G_y ist dann einfach die Lösungsmenge in Abhängigkeit von y. Wir erhalten

$$G_y = \begin{cases} \emptyset & \text{für } |y| > 1, \\ [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}] & \text{für } |y| \leq 1. \end{cases}$$

Dementsprechend berechnen wir

$$\mathrm{vol}_2(G) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}_1(G_y)\ dy = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-y^2}\ dy = \pi.$$

Wir können obige Regel auch iterieren. In drei Dimensionen erhalten wir dann

$$\mathrm{vol}_3(G) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}_2(G_z)\ dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}_1((G_z)_y)\ dy\ dz,$$

wobei

$$(G_z)_y = (G_y)_z = \{x \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in G\} =: G_{y,z}.$$

Wenn wir die beiden Integrale im letzten Ausdruck zusammenfassen ergibt sich

$$\mathrm{vol}_3(G) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{vol}_1(G_{y,z})\ d(y, z).$$

Das 3-dimensionale Volumen von G kann also auch als 2-dimensionales Integral über Schnittlängen berechnet werden. Ähnliches gilt in höheren Dimensionen.

Integrale

Hier gilt die Merkregel *„Integral über ein Volumen = Integral über Integrale über Schnittflächen"*. Formal heisst das,

$$\int_G f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{x_n}} f(x', x_n)\ dx'\ dx_n.$$

Setzt man f konstant 1, so ergibt sich obige Regel für Volumina.

Beispiel: Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f(x,y) := |xy|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_G f(x,y)\ d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_y} f(x,y)\ dx\ dy \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} |xy|\ dx\ dy \\ &= \int_{-1}^{1} (1-y^2)|y|\ dy \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Wieder können wir obige Regel iterieren. In drei Dimensionen erhalten wir dann

$$\int_G f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{G_z} f(x,y,z)\ d(x,y)\ dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{G_{y,z}} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz.$$

Wenn wir die beiden äusseren Integrale im letzten Ausdruck zusammenfassen ergibt sich

$$\int_G f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{G_{y,z}} f(x,y,z)\ dx\ d(y,z).$$

Das 3-dimensionale Integral über G kann also auch als 2-dimensionales Integral über 1-dimensionale Integrale über Schnittlinien berechnet werden. Ähnliches gilt in höheren Dimensionen.

Vertauschen von Integralen

Angenommen wir wollen in einem Ausdruck der Art

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\ dx\ dy$$

die Integrationsreihenfolge vertauschen, wobei die inneren Integrationsgrenzen von y abhängen. Dazu betrachten wir

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ a(y) \leq x \leq b(y)\}.$$

Beachte, dass gilt

$$G_y = \begin{cases} \emptyset & \text{für } y \notin [c,d], \\ [a(y), b(y)] & \text{für } y \in [c,d]. \end{cases}$$

Nach der obigen Regel für Integrale gilt daher

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\ dx\ dy = \int_G f(x,y)\ d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{G_x} f(x,y)\ dy\ dx.$$

Das Problem die Integrationsreihenfolge zu vertauschen reduziert sich also auf das Problem Schnitte zu bestimmen. Auch bei mehr als zwei iterierten Integralen können wir diese Vorgangsweise anwenden. Wir fassen die n-vielen Integrale als n-dimensionales Integral auf und berechnen dann die Schnitte in der gewünschten Reihenfolge.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir a priori annehmen, dass das Integral von f über G existiert. Dies folgt noch nicht aus der Existenz der iterierten Integrale. Für Genaueres müssen wir wieder auf die *Mass- und Integraltheorie* verweisen.

Beispiel: Gegeben sei der Ausdruck

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{y+6} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, müssen wir den Schnitt entlang der Koordinate x der Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2,\ y^3 \leq x \leq y+6\}$$

bestimmen. Anders gesagt, suchen wir für festes aber beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Menge aller $y \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichungen

$$\begin{gathered} 0 \leq y \leq 2, \\ y^3 \leq x \leq y+6 \end{gathered}$$

erfüllen. Die Lösungsmenge in Abhängigkeit von x bzw. der Schnitt entlang der Koordinate x ergibt sich zu

$$G_x = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x \notin [0,8], \\ [\max(0, x-6),\ \sqrt[3]{x}] & \text{für } x \in [0,8]. \end{cases}$$

Wir erhalten

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{y+6} f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^8 \int_{\max(0,x-6)}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\ dy\ dx.$$

Manchmal kann es sinnvoll sein, nach dem Vertauschen das äussere Integral als Summe von Integralen zu schreiben. In diesem Beispiel gilt

$$G_x = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x \notin [0,8], \\ [0,\ \sqrt[3]{x}] & \text{für } x \in [0,6], \\ [x-6,\ \sqrt[3]{x}] & \text{für } x \in [6,8] \end{cases}$$

und somit auch

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{y+6} f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\ dy\ dx + \int_6^8 \int_{x-6}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\ dy\ dx.$$