Wegparametrisierungen

Einleitung

In unserer Vorstellung ist ein *Weg* eine gerichtete 1-dimensionale Menge in einem höherdimensionalen Raum. Um dieser Idee eine exakte mathematische Bedeutung zu geben verwendet man gerne Parametrisierungen. Eine Wegparametrisierung (der Klasse C^1) in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$, wobei $a < b$ ist und γ stetig differenzierbar ist. Zwei Wegparametrisierungen γ und $\tilde{\gamma}$ werden miteinander identifiziert, wenn eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon [a,b] \to [\tilde{a},\tilde{b}]$ existiert mit $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ sowie $\varphi(a) = \tilde{a}$ und $\varphi(b) = \tilde{b}$. Ein Weg wird dann definiert als eine Äquivalenzklasse von Parametrisierungen. [1]

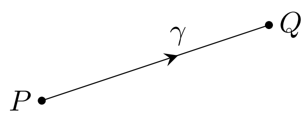
Wenn wir von Wegen sprechen, denken wir trotzdem meist eher an $\gamma([a,b])$ anstatt γ. Ziel dieses Blattes ist es anhand einiger häufiger Beispiele zu demonstrieren, wie man von einem Weg zu einer seiner Parametrisierungen gelangt. Heuristisch gesagt, wollen wir also von $\gamma([a,b])$ zu γ gelangen.

Liniensegmente

Die erste und einfachste Art von Wegen sind gerichtete Liniensegmente. Gegeben zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$, wollen wir die gerade Strecke von P nach Q parametrisieren. Wir definieren $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\gamma(t) = P + t \cdot (Q - P) = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$$

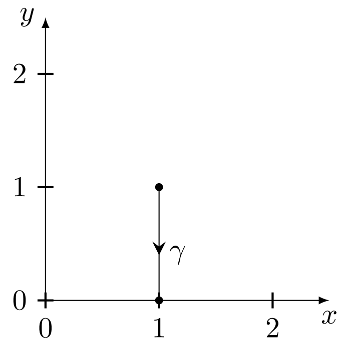
für alle $t \in [0,1]$. Es gilt, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ und $\gamma(t)$ liegt immer auf der Geraden durch P und Q. Ausserdem ist γ injektiv. Damit erfüllt die Parametrisierung alle unsere Erwartungen.



Beispiel: Für den Weg von $(1,1)$ nach $(1,0)$ erhalten wir

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

[1] Manchmal wird in der Literatur nicht zwischen Weg und Parametrisierung unterschieden.

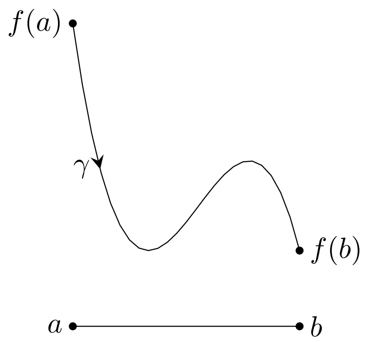


Funktionsgraphen

Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n-1}$. Wir wollen ihren Graph als Weg in $\mathbb{R}^n$ auffassen. Die zugehörige Parametrisierung lautet

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [a,b]$. Das Ergebnis ist ein Weg von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$, dessen Bild der Graph von f ist.

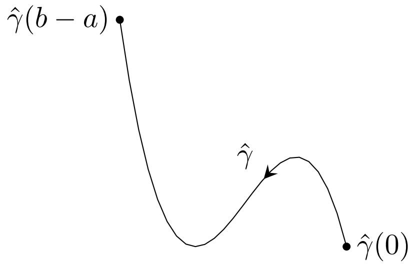


Wollen wir den Weg in umgekehrter Richtung durchlaufen, so definieren wir

$$\hat{\gamma}(t) = \gamma(b-t)$$

für alle $t \in [0, b-a]$. Man beachte dabei das geänderte Parameterintervall. [2]

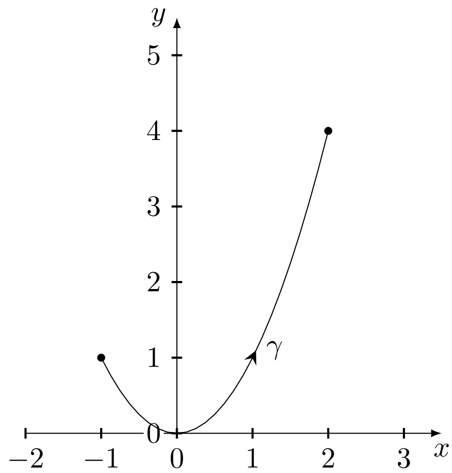
[2] Diese Konstruktion funktioniert natürlich für jeden Weg und nicht nur für Funktionsgraphen.



Beispiel: Für den Weg entlang des Funktionsgraphen von $f(x) := x^2$, $x \in [-1, 2]$, erhalten wir

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [-1, 2]$.



Für die umgekehrte Richtung erhalten wir

$$\hat{\gamma}(t) = \gamma(2-t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4-4t+t^2 \end{pmatrix}$$

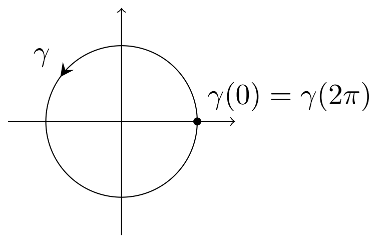
für alle $t \in [0, 3]$.

Kreissegmente

Betrachten wir einen Kreis mit Radius r um den Ursprung. Da der Kreis als Ganzes kein Funktionsgraph ist (sondern nur lokal), können wir nicht direkt den vorigen Abschnitt verwenden. Die häufigste Vorgangsweise hier ist, Sinus und Kosinus zu verwenden. Man definiert

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Offensichtlich erfüllen alle Punkte auf dem Weg die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist die Parametrisierung injektiv und es gilt $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (r, 0)$.

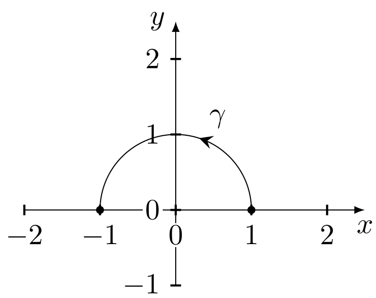


Wollen wir nur einen Teil des Kreises parametrisieren oder den Kreis öfters abgehen, können wir das Parameterintervall entsprechend verändern.

Beispiel: Wollen wir nur die obere Hälfte des Einheitskreises in positiver Richtung abgehen, erhalten wir

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, \pi]$. Man beachte hierbei vor allem das Parameterintervall.



Beispiel: Wollen wir den Kreis mit Radius 5 drei mal in negativer Richtung abgehen, erhalten wir

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ -5\sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 6\pi]$. Man beachte hierbei wieder das Parameterintervall.